



Title	1988年度談話会アブストラクト集 Colloquim Lectures 北海道大学理学部数学教室
Author(s)	Kamishima, Y.
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 11, 1
Issue Date	1989-01-01
DOI	10.14943/5130
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/5445 ; http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1272/
Type	bulletin (article)
File Information	11.pdf



[Instructions for use](#)

1988年度談話会アブストラクト集

Colloquim Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by Y. Kamishima

Series # 11. May, 1989

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- # 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.
- # 2: J.L. Heitsch, The Lefschetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.
- # 3: K. Kubota (Ed.), 第 12 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.
- # 4: J. Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.
- # 5: Y. Giga (Ed.), Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.
- # 6: T. Yoshida (Ed.), 1987 年度談話会アブストラクト集 Colloquim Lectures, 96 pages. 1988.
- # 7: S. Izumiya, G. Ishikawa (Eds.), “特異点と微分幾何” 研究集会報告集, 1988.
- # 8: K. Kubota (Ed.), 第 13 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.
- # 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.
- # 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.

1988年度 談話会アブストラクト

ページ

1	岡部 靖憲	KM_2O ランジュヴァン方程式の理論と一般化された赤池情報量	1
2	鈴木 治夫	或る C^* -環の K -理論	5
3	R. V. Kohn	Motion by Mean Curvature, Parabolic Harmonic Maps, and Singular Perturbations of Evolution Partial Differential Equations	6
4	坪井 俊	Godbillon-Vey invariant について	8
5	小池 敏司	On C^0 determinacy of analytic functions related to weights	11
6	Isaac Namioka	Radon-Nikod'ym compact spaces and fragmentability	13
7	佐々木 武	超幾何微分方程式系についての話題	14
8	泉池 敬司	Bergman 空間上の Hankel 作用素	17
9	Michel Jambu	Arrangements of hyperplanes	19
10	N. J. A. Sloane	Sphere Packing and Applications	21
11	渡辺 公夫	擬斉次多項式で定義される $K3$ 曲面の negative cycles	25
12	Jack F. Conn	Levi-Mal'cev Theorems for Smooth Poisson Algebras	26
13	Herbert Heyer	Potential Theory on a hypergroup	27
14	伊藤 俊次	複素 2 進展開とフラクタル	29
15	肥田 晴三	多変数の Galois 表現について	31
16	竹内 光弘	直交群の量子化	38
17	服部 昌夫	小平消滅定理と群作用	41
18	Jacob Palis	Fractional Dimension and Homoclinic Bifurcations	43
19	菅原 正博	自由ホモトピー類集合の初等的性質	44
20	永尾 汎	Brauer 対応と Glauber 対応	45
21	阿賀岡芳夫	Cayley-Hamilton の定理と Amitsur-Levitzki の恒等式	47
22	樋口 保成	Level set representation for the Gibbs states of Ising models	53
23	渡辺アツミ	Abelian defect group をもつ p -block について	55
24	野田 明男	Lévy's stochastic infinitesimal equations, revisited	57
25	A. Eydeland	Two approaches to stationary problems in fluid dynamics	63
26	宮川 鉄朗	Morrey 空間におけるポテンシャル評価	65
27	伊藤 光弘	Geometry of monopoles	67
28	西川 青季	葉層構造のコホモロジーと熱方程式	72

4月27日 談話会 (岡部先生)

KM20 ランジュヴァン方程式の理論と一般化された赤池情報量

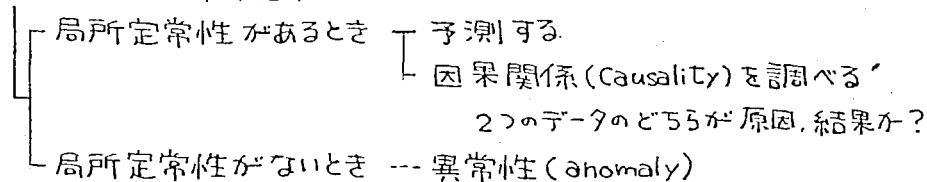
時系列 — ランダムなデータ

$$Z = (Z(0), Z(1), \dots, Z(N)) \quad Z(i) \in \mathbb{R}^d \quad (0 \leq i \leq N)$$

(例) 気象データ, 経済データ, 医学データ (脳波) etc

研究の目的

データの分析 (局所定常性を持つか?)



1°. 分析

データ Z から標本相関関数 $R = (R_{pq})_{1 \leq p, q \leq d}$ を求める

$$R_{pq}(n) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N-n} (Z_p(n+j) - \mu_p)(Z_q(j) - \mu_q) \quad (0 \leq n \leq N)$$

$$\text{ここで } \mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N Z(n)$$

これは近似的には確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上に \exists 定常過程 $Z = (Z(n) : 0 \leq n \leq N)$ s.t.

$$E[Z(n)] = \mu, \quad E[Z(n) \otimes Z(m)] = R(n-m)$$

⑧ 本稿では列の 相関 を扱う

2° 数学の理論

確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上の定常過程 $X = (X(n) : 0 \leq n \leq N)$ s.t.

$$E[X(n)] = 0 \quad E[X(n) \otimes X(m)] = R(n-m)$$

があったとする.

KM20 ランジュヴァン方程式

\exists ランジュヴァンデータ $(Y_+(n, k), \delta_+(n), V_+(n) : 0 \leq k < n \leq N)$

\exists ランジュヴァン雑音 $V_+ = (V_+(n) : 0 \leq n \leq N)$ ((Ω, \mathcal{B}, P) 上の確率過程) s.t.

$$\begin{cases} X(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} Y_+(n, k) X(k) - \delta_+(n) X(0) + V_+(n) \\ X(0) = V_+(0) \end{cases}$$

次の性質がある

$$(1) E[\nu_+(n)^t \nu_+(m)] = \delta_{mn} V_+(n)$$

(2) $R(\cdot)$ からランジュウアンデータを求めるアルゴリズムがある

$$\begin{array}{ccccc} R(\cdot) & \longrightarrow & \delta_+(\cdot) & \xrightleftharpoons{\quad} & \gamma_+(\cdot, *) \\ & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & V_+(\cdot) \end{array}$$

(3) X の局所定常性 $\iff \xi_+$ の白色雑音性

ただし $\xi_+ = (\xi_+(n) : 0 \leq n \leq N)$ は

$$\xi_+(n) = W_+(n)^{-1} \nu_+(n)$$

($W_+(n)$ は $W_+(n)^t W_+(n) = V_+(n)$ なる下三角行列)

3° 因果の考察

予測誤差 $\nu_+(n) = X(n) - P_{[X(0), \dots, X(n-1)]} X(n)$

$\|\nu_+(n)\|^2$ をできるだけ小さくしたい。

そこで $X = (X(n) : |n| \leq N)$ の $N \rightarrow \infty$ とする

局所定常 \longrightarrow 大域定常

KM_20

$KM0$

KM0 ランジュウアン方程式

\exists 白色雑音 $\eta_+ = (\eta_+(n) : n \in \mathbb{Z})$, $\exists V_+(\infty) \in GL(d; \mathbb{R})$ s.t.

$$X(n) = -S \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{k-1} \gamma_+(l, l-k) X(n-k) + V_+(\infty)^{\frac{1}{2}} \eta_+(n)$$

ただし $V_+(n) \rightarrow V_+(\infty)$, $\delta_+(n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

$$(d=1) \quad \|X(0) - P_{[X(n) : n \leq -1]} X(0)\|^2 = V_+(\infty)$$

$$(d=2) \quad X(n) = \begin{bmatrix} X_1(n) \\ X_2(n) \end{bmatrix} \quad \text{とおく}$$

$$\|X_j(0) - P_{[X_j(n) : n \leq -1]} X_j(0)\|^2 =: C_j \quad (j=1,2)$$

$$\|X_j(0) - P_{[X_1(n), X_2(n) : n \leq -1]} X_j(0)\|^2 =: d_j \quad (j=1,2)$$

とおく

$$(1) \quad \frac{1}{2} \log C_i = H(X_j) - \frac{1}{2} \log 2\pi e$$

\uparrow 単位時間あたりのエントロピー

(2) (因果) $C_1 > C_2$ とする。

もちろん $C_1 \geq d_1$, $C_2 \geq d_2$ である (∵ 後者の方が情報が多い)

原因となる方は結果となる方のある程度の情報を持つと考えられるので $C_i - d_i (i=1,2)$ の大きい方が原因と考えられる

(3) 大数の法則より

$$\frac{\sum_{n=0}^N U_+(n)^2}{N+1} - \frac{\sum_{n=0}^N V_+(n)}{N+1} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N (U_+(n)^2 - V_+(n)) \rightarrow 0$$

↓
 $V_+(\infty)$

である。そこで

$$H(X; \omega) := \log \left(\frac{\sum_{n=0}^N U_+(n)^2}{N+1} \right)$$

とある 標本予測誤差 という (cf. 赤池先生の AIC)

4° 再び分析

経験則として $0 \leq n \leq M := [3\sqrt{N}] - 1$ まで信頼できるとされている

(定常性の検定) $0 \leq i \leq N-M$ とする。

$$X_i = (X(i+n) : 0 \leq n \leq M)$$

i に対して U_{+i}, ξ_{+i} をつくる

(H) 平均 $\frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^M \xi_{+i}(n) = \frac{1}{\sqrt{M+1}} \frac{1}{\sqrt{M+1}} \sum_{n=0}^M \xi_{+i}(n)$
 $\rightarrow N(0,1)$ (中心極限定理)

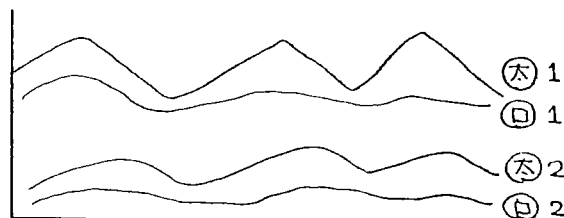
(S) $\left| \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^M \xi_{+i}(n) \right| < \frac{1.96}{\sqrt{M+1}}$

(V) は 95% で成り立つことが知られている。そこで、このとき ξ_{+i} が白色雑音だ^等 と思うことにする

(C) 定常性 の検定
今 と あ い た

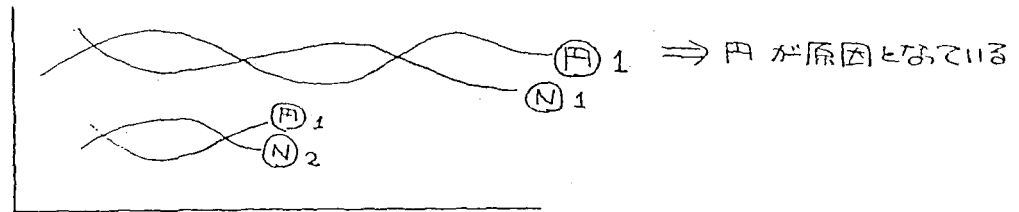
例) 因果関係

(1) 太陽の黒点とロジスティック変換



\Rightarrow 無関係
(あたりまえだが)

(2) 円と NEC



Cf. 経済の Granger Causality

① time 標準化誤差 が 橋渡に 2.5% しか 1% 以上 ない。

可換環 A の K_0 -理論において積、外積ベキ（対称ベキ）演算が定義される。これは更に K_1 -理論に拡大され Reimann-Roch 定理の一般化に役だっている（[S] 参照）。特に A が可換 Banach 環ならば、これらの演算は $K_0(A)$ および懸垂同形により $K_1(A)$ において定義され、Gelfand 表現によって、幾何学的な積、ベキ演算の代数的構成とみなされる。

しかし、 A が非可換の場合、この種の演算の構成は現在の所 $K_0(A)$ に対してすらできていない（[B] 参照）。本講演ではある制限された C^* -環のカテゴリに対し、 K_0 における積及びベキ演算の構成を試みる。

任意の有限次元 C^* -環の準同形写像に整数 ≥ 0 を成分とする行列 (m_{ij}) が対応するが、この行列の各行の成分が丁度一つ 1 他は 0 であるとき、この準同型写像を multiplicative と呼ぶことにする。

multiplicative な準同形写像を射とする有限次元 C^* -環のカテゴリから得られる AF -環 A に対して $K_0(A)$ における積およびベキ演算を構成することができ、この制限されたカテゴリに関する限り、可換環の場合と全く同じ演算公理系を満足する。

この制限された C^* -環のカテゴリは実は Cantor 集合の非可換類似であることをつけ加えておく。一般 AF -環のカテゴリではこの演算に対し障害が生ずると思われる。

文 献

- [B] B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras*, MSRI Publ. Springer-Verlag 1986.
- [S] C. Soule, *Operations en K-theorie algebrique*, Can. J. Math. (1985), 488-550.

Motion by Mean Curvature, Parabolic Harmonic Maps,
and Singular Perturbations of Evolution
Partial Differential Equations

Robert V. Kohn
Courant Institute

Consider the parabolic equation

$$\begin{aligned} u_\tau - \varepsilon^2 \Delta u + u^3 - u &= 0 & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ \partial u / \partial \nu &= 0 & \text{at } \partial \Omega, \end{aligned}$$

which represents gradient flow for the "energy"

$$E_\varepsilon(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} \varepsilon^2 |\nabla u|^2 + \frac{1}{4} (u^2 - 1)^2.$$

It is well-known that for generic initial data the solution will approach a local minimum of E_ε as $t \rightarrow \infty$. If Ω is convex then the only local minima are $u \equiv +1$ and $u \equiv -1$; one might say that the "large time behavior of u admits no nontrivial spatial structure".

If ε is small, however, the solutions can keep nontrivial spatial structure for a very long time : one might call this phenomenon metastability. If Ω is an interval, u will be approximately ± 1 except near certain transition layers of width ε , which move exponentially slowly in ε ; this case was recently studied by J. Carr and R. Pego. In higher dimensions the transitions are along surfaces, which move with velocity $ck\varepsilon^2$, where c is a constant and k is the mean curvature. This result was obtained formally by Keller, Rubenstein, and Sternberg, expanding on earlier results of others; it has been linked to certain

metallurgical phenomena by Allen and Cahn. For the radially symmetric case a rigorous proof has been obtained in joint work with L. Bronsard.

Curiously, the vector-valued analogue

$$u_\tau - \varepsilon^2 \Delta u + (|u|^2 - 1)u = 0, \quad u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

has totally different behavior. Changing variables to $t = \varepsilon^2 \tau$, it becomes gradient flow for

$$E_\varepsilon(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4} \varepsilon^{-2} (|u|^2 - 1)^2 \right] dx ,$$

a penalization of the "energy" whose critical points are harmonic maps to the sphere S^{d-1} . In the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$, Yunmei and (independently) Rubenstein and Sternberg have shown that one obtains a weak solution of the parabolic equation describing gradient flow for the harmonic map functional, and this has recently been extended to more general image manifolds by Struwe and Yunmei. The solutions so obtained are, however, very weak; it remains an open question whether or not they really have singularities.

1988年 6月 15日

Godbillon-Vey invariant について

坪井 俊

3次元多様体 M 上の余次元1葉層構造^予の Godbillon-Vey 不変量は
次のように定義される。葉層が 1-form ω で定義されると、積分
可能条件より $d\omega = \omega \wedge \eta$ とする 1-form η が存在する。これ
を使って $GV(\eta) = \int_M \eta \wedge d\eta$ で与えられる。

1970年に発見されたこの不変量は、葉層同相群の不変量で、
葉層の C^2 級の連続族に対し、連続に変化する。(Thurston の例)。

Godbillon-Vey 不変量は C^2 級の葉層に対して定義されているが、これは、
いくつかのより広い葉層のクラスに拡張されている。葉層 S' を考える
ことにし、 GV は $Diff(S')$ の 2-cocycle を与えるので、群の
cocycle としてみると次のようである。

- | | |
|-------------------------|--|
| Duminy-Sergiescu (1981) | S' の class P 同相の群に対して。 |
| Ghys-Sergiescu (1985) | S' の Piecewise Linear 同相の群に対して。 |
| Ghys (1987) | S' の class P 同相の群に対して 2つの不変量定義。 |
| Hurder-Katok (1986) | S' の $C^{1+\alpha}$ 級同相 ($\alpha > \frac{1}{2}$) の群に対して定義。 |

一方 C^1 級葉層の分類空間 BP' は可縮で、 $Diff_+^1(S')$ には
オイラー類以外の 2-cocycle は存在しない。そこで、Godbillon-Vey
不変量の定義される葉層あるいは同相群の最も広いクラスを
求めることが問題となる。

ここでまず $C^{1+\alpha}$ 級同相 ($\alpha < \frac{1}{2}$) の群に対しては、 GV は自然に
は定義されないことを示す。余裕があれば、 GV を定義するクラスを
求める試みについてのこと。

定理 1. GV は $C^{1+\alpha}$ 位相で連続である ($\alpha < \frac{1}{2}$).

定理 2. 次の様な $C^{1+\alpha}$ 葉層 (M, \mathcal{F}) が存在する.

M は 閉多様体, $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ (B_i は disjoint saturated Bowl set)
 B_i 上 GV は定義され $\sum_{i=1}^{\infty} GV(\mathcal{F}|_{B_i}) = \infty$.

証明は葉層の example を作ることにより与えられる.

まず Thurston の例を使って 次の様な葉層 S' 積の族 $\{\mathcal{F}_t\}$ を作る

$$|\mathcal{F}_t|_r \leq C_r t^{\frac{1}{2}} \quad \text{かつ} \quad GV(\mathcal{F}_t) = t \quad (0 \leq t \leq T).$$

定理 1 の証明は \mathcal{F}_t の S^1 方向への n -fold cover $\mathcal{F}_t^{(n)}$ についての次の評価式から得られる.

$$|\mathcal{F}_t^{(n)}|_{1+\alpha} \leq C_2 n^{\alpha} t^{\frac{1}{2}}, \quad GV(\mathcal{F}_t^{(n)}) = nt.$$

$t = \frac{1}{n}$ とすると $\alpha < \frac{1}{2}$ ならば $|\mathcal{F}_{\frac{1}{n}}^{(n)}|_{1+\alpha} \rightarrow 0, \quad GV(\mathcal{F}_{\frac{1}{n}}^{(n)}) = 1$ となる.

定理 2 の証明は $\mathcal{F}_{\frac{1}{n}}^{(n)}$ と同じ評価を用いるコンパクト台をもつ葉層 R 積を構成し、それらの“無限和”を作ることにより与えられる.

このように葉層 R 積は fragmentation homotopy を使い、 S' 方向への無限巡回被覆をとり、その一部分を貼りあわせることにより得られる.

GV を定義するクラスとして考えているのは次のようなものである.

S' の cyclic order に与えられた有限個の点の集合 $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ と S' 上の関数 φ に対し (φ は 右又は左に連続である.)

$$W(\varphi, A) = \sum |\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})|^2 \quad \text{とおく.}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\text{mesh}(A) \leq \varepsilon} W(\varphi, A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\text{mesh}(A) \leq \varepsilon} W(\varphi, A) \quad \text{のとき}$$

この値は $\sum_{x \in S^1} |\varphi(x+0) - \varphi(x-0)|^2$ に等しいとされる. このとき

$\varphi(x+0) \neq \varphi(x-0)$ となる点 x に対し長さ $|\varphi(x+0) - \varphi(x-0)|^2$ の interval を挿入して得られる連続関数 $\bar{\varphi}$ について.

$s \mapsto \sup_{\text{multi } A \in e^s} w(\bar{\varphi}, A)$ を $(-\infty, 0]$ 上可積分とすると

φ は性質 Q を持つと可なり

S' の (微分) 同相 f が 性質 Q を持つとは

「 $\log Df$ が 性質 Q を持つこと」あるいは正確には

「性質 Q を持つ φ が存在し、 $f(x) = f(0) + \int_0^x e^{\varphi(t)} dt$

と書かれること」

と定義する。

性質 Q を持つ同相全体のなす群がこれまで GV が
定義された群の中で最も広いものであると予想し、これを
検証中である。

On C^0 determinacy of analytic functions related to weights

小池敏司 (兵庫教育大学)

$E_{[k]}(n, 1): (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ の C^k 級関数芽全体の作る集合とする (但し $k=1, 2, \dots, \infty, \omega$). この時 $f, g \in E_{[k]}(n, 1)$ が C^0 -同値 であるとは、局所同相写像 $\sigma: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ が存在して $f = g \circ \sigma$ となる時、いう。

次に、 n 個の weight からなる system

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^+ \times \dots \times \mathbb{Q}^+ \text{ 但し } \min_{1 \leq j \leq n} \alpha_j = 1$$

を考える。この時、 α から定まる \mathbb{Q}^+ の部分集合を

$$I(\alpha) \equiv \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \mid \beta_j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ (1 \leq j \leq n), \beta_1 + \dots + \beta_n \geq 1 \right\}$$

と定義する。そうすると、

$$I(\alpha) = \{i(N) \mid 0 < i(1) < i(2) < \dots < i(N) < \dots \ (N \in \mathbb{N})\}$$

と表わされる。 $\delta_N = i(N+1) - i(N) > 0$ とおくことにしよう。

$f, g \in E_{[\omega]}(n, 1)$ の $0 \in \mathbb{R}^n$ での展開を

$$f(x) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} A_\beta x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}, \quad g(x) = \sum_{r \in \mathcal{R}} B_r x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}$$

とする。この時、 $i(N) \in I(\alpha)$ に対し、 f, g が $i(N)$ -同値 とは、

$$\sum_{\substack{\beta \in \mathcal{B} \\ \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n \leq i(N)}} A_\beta x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} = \sum_{\substack{r \in \mathcal{R} \\ \alpha_1 r_1 + \dots + \alpha_n r_n \leq i(N)}} B_r x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}$$

となる時、いう。この関係 $\sim_{i(N)}$ は、同値関係である。ここで、

$$J_\alpha^{i(N)}(n, 1) \equiv E_{[\omega]}(n, 1) / \sim_{i(N)}$$

とおく。 $\tilde{f}_\alpha^{i(N)}(0)$ は、 f の $\sim_{i(N)}$ に関する同値類を表わすことにする。

これは α に付随した次数が $i(N)$ を越えな、多項式代表元と

同-視できる.

$f \in E_{[w]}(n, 1)$ に対して, $0 \in \mathbb{R}^n$ は f の特異点になっているものとする.
その時, $i(N) \in I(\alpha)$, 但し $\alpha_j < i(N)$ ($1 \leq j \leq n$) に対して, $0 \in \mathbb{R}^n$ の周りで

$$\tilde{\partial}_{i(N)} f(\alpha) \equiv (|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha)|^{\frac{i(N)-1}{i(N)-\alpha_1}}, \dots, |\frac{\partial f}{\partial x_n}(\alpha)|^{\frac{i(N)-1}{i(N)-\alpha_n}})$$

とおく. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^+ \times \dots \times \mathbb{Q}^+$ に対して.

$$|x|_\alpha = \sqrt{|x_1|^{\frac{2}{\alpha_1}} + \dots + |x_n|^{\frac{2}{\alpha_n}}} \quad (x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

と表わすことにする. この時, 次の結果を得る.

定理 1. $H \in J_\alpha^{i(N)}(n, 1)$ ($n \leq 3$) とする. この時, $C, a > 0, \varepsilon > 1 - \delta_N$ が存在して

$$|\tilde{\partial}_{i(N)} H(\alpha)| \geq C |x|_\alpha^{i(N)-\varepsilon} \quad (|x| < a)$$

が成立するならば, $J_\alpha^{i(N)} G(0) = 0$ を満たす任意の $G \in E_{[w]}(n, 1)$ に対して, $H+G$ と H は C^0 -同値となる.

注意. ここで $E_{[w]}(n, 1)$ を $E_{[L(n)]+1]}(n, 1)$ に変えることができる.

$\mathcal{H}(n, 1) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ の正則関数芽全体の作る集合とする. この時, $f, g \in \mathcal{H}(n, 1)$ が C^0 -同値 (又は, RL- C^0 -同値)

であるとは, 局所同相写像 $\sigma : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ (又は,

$\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$) が存在して, $f = g \circ \sigma$ (又は, $\tau \circ f = g \circ \tau$)

となる時いう. 複素の場合にも上と同様に, α に対して

$I(\alpha), \delta_N, J_\alpha^{i(N)}(n, 1), \tilde{\partial}_{i(N)}, | \cdot |_\alpha$ が定義される. この時次を得る.

定理 2. $H \in J_\alpha^{i(N)}(n, 1)$ とする. この時, $C, a > 0, \varepsilon > 1 - \delta_N$ が存在して

$$|\tilde{\partial}_{i(N)} H(\alpha)| \geq C |x|_\alpha^{i(N)-\varepsilon} \quad (|x| < a)$$

が成立するならば, $J_\alpha^{i(N)} G(0) = 0$ を満たす任意の $G \in \mathcal{H}(n, 1)$ に対して, $H+G$ と H は RL- C^0 -同値となる. 更に $n \neq 3$ ならば, それらは C^0 -同値になる.

Radon-Nikodým compact spaces and fragmentability.

Isaac Namioka

Abstract:

A compact Hausdorff space K is called Eberlein compact (EC) if it is homeomorphic to a weakly compact subset of a Banach space. The class of EC spaces is general enough to be useful in analysis, and yet it shares many properties with the class of compact metric spaces. In this talk, we introduce a new class of compact Hausdorff spaces which ~~was~~^{is} suggested by the study of Banach spaces with the Radon-Nikodým property. A compact Hausdorff space is called a Radon-Nikodým compact (RNC) space if it is homeomorphic to a weak* compact subset of a dual Banach space with the Radon-Nikodým property. The class of RNC spaces contains all EC spaces and scattered compact Hausdorff spaces, and, therefore, the class of RNC spaces is strictly larger than that of EC spaces. A RNC space possesses many pleasant properties of EC spaces, but there are some subtle differences as well. For instance, if K is RNC then K is sequentially compact, and the unit ball of $C(K)^*$ is RNC under the weak* topology. The ~~countable~~^{product} of a countable family of RNC spaces is again RNC. In order to give a topological characterization of RNC spaces, we need the notion of fragmentability. A topological space (X, \mathcal{T}) is said to be fragmented by a metric ρ on X if for each non-empty subset A of X and each $\epsilon > 0$ there exists a non-empty \mathcal{T} -open subset U of X with $A \cap U \neq \emptyset$ and $\rho\text{-diam}(A \cap U) < \epsilon$. Then, a compact Hausdorff space K is RNC if, and only if, K is fragmented by a lower semicontinuous ^{metric} on K . Finally we mention some open problems concerning RNC spaces.

超幾何微分方程式系についての話題

久保 武

1. Euler - Gauss の微分方程式系についての意味
のある Gauss の発見から話を始める。方程式は
 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対し

$$E(\alpha, \beta, \gamma): x(1-x)z'' + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\}z' - \alpha\beta z = 0$$

と定義され, Euler の積分

$$(1) \quad \int t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tx)^{-\beta} dt$$

が解にもなっている。いま $x_0 \neq 0, 1, \infty$ の 2 つの
異なる解 z^0, z^1 ; σ は x_0 を基点とする
 $P = \{0, 1, \infty\}$ のループ σ とすると, σ を沿って
 z^i 達の解の接線系によって x_0 の新しい解 z^i
 $\sigma_* z^i$ が得られる表現

$$\sigma \longrightarrow M_\sigma \in GL(2, \mathbb{C})$$

$$\sigma_* \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix} = M_\sigma \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \end{pmatrix}$$

が定まる。この表現は $\pi_1(P - \{0, 1, \infty\}, x_0)$ の線
の monodromy 群と一致する。この群は x_0 や
 z^0, z^1 のとり方に依存する。Gauss は 1807 年、次の
ことを示した:

(α, β, γ) が特殊な値をとる時, 線
 $x \longmapsto [z^0(x), z^1(x)] \in \mathbb{P}^1$

の逆写像は 1 価となり modular 写像になること,
例として $(\alpha, \beta, \gamma) = (1/2, 1/2, 1)$ は λ -写像,
対応する monodromy 群は楕円 modular 群 $\Gamma(2)$ である。

2. これは次のように一般化した。そのために上記積分が曲線 $s^2 = t(1-t)(1-tx)$ の周期積分であることに注意しよう。 $\gamma = 2$, genus = 2 の曲線

$$s^2 = t(1-t)(1-tx^1)(1-tx^2)(1-tx^3)$$

の周期積分に付随した微分方程式系を求めよとこの問題にある。1. とおいて(1)を

$E(\alpha, \beta, \gamma)$	(1)	$\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$	楕円 modular
?	(2)	$\mathbb{P}^3 - \{x^i = 0, 1, x^i(i+j)\}$	Siegel modular

とした

$$(2) \quad \int t^\alpha (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-tx^1)^{-\beta_1} (1-tx^2)^{-\beta_2} (1-tx^3)^{-\beta_3} dt$$

をみる。

この積分は Lauricella の微分方程式系, $F_D(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma)$ とかく, とおいたときは互にかゝり合っている。この方程式系の独立な解の個数は 4 である。 $\gamma = 3$ の「4」は 2 次の有理曲線で部分が悪い。これは Gauss の場合, 周期積分の行えは上半平面であり, いまの場合のこれは Siegel の上半平面 $\mathcal{H}_2 = \left\{ \tau = \begin{pmatrix} \tau^1 & \tau^2 \\ \tau^2 & \tau^3 \end{pmatrix} ; \text{Im } \tau > 0 \right\}$ である。よく知られているように, \mathcal{H}_2 は自然な埋め込み

$$\mathcal{H}_2 \ni \tau \mapsto [1, \tau^1, \tau^2, \tau^3, \tau^1\tau^3 - (\tau^2)^2] \in Q_3 \subset \mathbb{P}^4$$

とされている (Q_3 は \mathbb{P}^4 の quadric)。 $\gamma = 3$ の微分方程式系は $4 + 1 = 5$ の独立な解をもつのである。

3. $\gamma = 2$ 新しい方程式系をつくる 次のような操作を繰り返す。
方程式(系) E, F_D は 可積分系

$$de = \omega e$$

とかける。 ω は 1 次微分式と要素とする行列, e は ベクトル e_i の有限な組 = 行列 である。いま $e_i \in V = \mathbb{C}^r$ とする。

すると, $E_s = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_s} \in \bigwedge^s V$ は s 個の可積分
をみたす。また ω_s は s 形式 ω_s の形式が成り立つ

$$dE_s = \omega_s E_s$$

これから $s = r-1$ のとき $\bigwedge^{r-1} V \cong V^*$ でありベクトルの
次元は V と同じである。したがってこの操作は F_D について
行うと好ましい

$$e : F_D(\alpha, \beta, \gamma) \longrightarrow E_3 : F_D(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma)$$

が得られる。このとき周期積分は $(\alpha, \beta, \gamma) = (1/2, 1/2, 1/2, 1)$

のときであり、これは「 $s=2$ 」のとき ω_2 の積分は ω_2 に等しい。
よって F_D について E_2 と $s=2$ の γ -解の同値性は

$$\binom{4}{2} = 6$$

これから $\mathbb{P}^3 - \{x^i = 0, 1, x^{i+j}\}$ から \mathbb{P}^5 の子線
を導く。しかも ω_2 の積分は ω_2 に等しい。 $(\alpha, \beta, \gamma) = (1/2, 1/2, 1/2, 1)$
ならば monodromy 群は $s=2$ の γ -解の同値性
と等しい。本質的にこの場合のみは ω_2 の積分は ω_2 に等しい。
従って $\mathbb{P}^3 - \{x^i = 0, 1, x^i\}$ から \mathbb{P}^4 の子線を得る。
これにより、 E_2 の外積操作は Plücker の変換式より
 Q_3 に属する。これは ω_2 の積分は ω_2 に等しい。
したがって、実はこれは $s=2$ の γ -解の同値性
と monodromy 群に等しい。これは ω_2 の積分は ω_2 に等しい。

4. 一般に ω の \otimes と \wedge は具体的に ω の \otimes と \wedge は
具体的に ω の \otimes と \wedge は具体的に ω の \otimes と \wedge は

具体的には $M. Yoshida, M. Hara$ (ともに九州) の ω の \otimes と \wedge は
具体的に ω の \otimes と \wedge は具体的に ω の \otimes と \wedge は

Bergman空間上の Hankel 作用素

神奈川県 泉池 菊子

D : open unit disc

$L^2(D)$: D 上の L^2 空間

$L_a^2(D) = H(D) \cap L^2(D)$ Bergman 空間

$H^2(\partial D) = \{f \in L^2(\partial D); \hat{f}(n) = 0 \ \forall n < 0\}$ Hardy 空間

[1] $f \in L^\infty(\partial D) \mapsto \bar{f} \notin L^2$

$T_f: H^2(\partial D) \ni h \rightarrow P(fh) \in H^2(\partial D)$ Toeplitz 作用素

$H_f: H^2(\partial D) \ni h \rightarrow (I-P)(fh) \in L^2(\partial D) \ominus H^2(\partial D)$ Hankel 作用素

① H_f compact $\Leftrightarrow f \in H^\infty + C$

Axler-Chang-Sarason-Volberg 定理:

$H_f^* H_g$ compact $\Leftrightarrow f|_Q$ or $g|_Q \in H^\infty|_Q \ \forall Q = Q_C$ -level set

特別な場合: $f, g \in H^\infty(D)$ の時

① $H_{\bar{f}}$ compact $\Leftrightarrow f|_Q$ constant $\forall Q$

② $H_f^* H_{\bar{g}} = T_g^* T_f - T_f T_g^*$ compact $\Leftrightarrow f|_Q$ or $g|_Q$ is constant $\forall Q$

[2] $f \in L^\infty(D) \mapsto \bar{f} \notin L^2$

$T_f: L_a^2(D) \ni h \rightarrow P(fh) \in L_a^2(D)$

$H_f: L_a^2(D) \ni h \rightarrow (I-P)(fh) \in L^2(D) \ominus L_a^2(D)$

① $f \in H^\infty$ の時,

$H_{\bar{f}}$ compact $\Leftrightarrow f|_D$ constant $\forall D = G$ -Gleason part
($D \neq D$)

$\Leftrightarrow \lim_{|z| \rightarrow 1} (1-|z|^2) |f'(z)| = 0 \ (f \in \mathcal{B}_0)$

Axler-Gorkin-Zheng 定理。 $f, g \in H^\infty(D)$ のとき,

$$H_f^* H_g = T_g^* T_f - T_f T_g \text{ compact}$$

$$\Leftrightarrow f|_D \text{ or } g|_D \text{ constant} \quad \forall D: \text{ Gleason part } (D \neq D)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{|z| \rightarrow 1} (1-|z|^2) \min \{|f'(z)|, |g'(z)|\} = 0$$

[3] $f \in L_a^2(D)$ について

$$H_{\bar{f}} : H^\infty(D) \ni h \rightarrow (I-P)(\bar{f}h) \in L^2(D) \ominus L_a^2(D)$$

Axler 定理。

$H_{\bar{f}}$ は $L_a^2(D)$ に bounded になることができる

$$\Leftrightarrow \sup_{|z| < 1} (1-|z|^2) |f'(z)| < \infty \quad (f \in \mathcal{B})$$

$$H_{\bar{f}} \text{ は compact} \Leftrightarrow \lim_{|z| \rightarrow 1} (1-|z|^2) |f'(z)| = 0 \quad (f \in \mathcal{B}_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{|z| \rightarrow 1} \|f \circ \phi_z - f(z)\|_p = 0 \quad \forall p \geq 1$$

$$\left(\phi_z(z) = \frac{z-z}{1-\bar{z}z} \right)$$

予想 $f, g \in \mathcal{B}$ のとき,

$$H_f^* H_g \text{ compact} \Leftrightarrow \lim_{|z| \rightarrow 1} (1-|z|^2) \min \{|f'(z)|, |g'(z)|\} = 0$$

$$(\Leftrightarrow \lim_{|z| \rightarrow 1} \|(\overline{f \circ \phi_z - f(z)})(g \circ \phi_z - g(z))\|_p = 0 \quad \forall p \geq 1)$$

\Leftarrow OK, 多次元 Ball $z'' \notin$ OK

命題: $f, g \in \mathcal{B}$, $H_f^* H_g$ compact

$$\Rightarrow \lim_{|z| \rightarrow 1} \|P[(\overline{f \circ \phi_z - f(z)})(g \circ \phi_z - g(z))]\|_2 = 0.$$

88/07/01

M. JAMBIS

ARRANGEMENTS OF HYPERPLANES

Witt formula can be considered as a relation between the fundamental group of $X = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, the cohomology of X and the free Lie algebra over a set of n elements, as follows:

$$\sum_{p \geq 0} \chi(p) t^p = \prod_{i \geq 1} (1 - t^i)^{-Y_i} = (1 - nt)^{-1}$$

where $\chi(p) = \dim \mathcal{E}(\text{Lib}(A))$, $|A| = n$

$B_X(t) = 1 + nt$, the Binomial polynomial of X

$Y_i = \text{rank } \Gamma_i \Pi_i(X) / \prod_{j=1}^{i-1} \Pi_j(X)$, (quotients of the lower central series)

This formula can be extended in the context of arrangements of hyperplanes. Let $A = \{H_1, \dots, H_n\}$ be a set of hyperplanes of \mathbb{C}^l (through the origin) and $X = \mathbb{C}^l \setminus \bigcup_{H \in A} H$.

Define an arbitrary linear order on A : $H_1 < H_2 < \dots < H_n$.

A $(p-1)$ -broken-circuit $\{H_{i_1}, \dots, H_{i_p}\}$ is an ordered sequence of hyperplanes of A such that there exists $H \in A$, $H > H_{i_p}$ and

$$\text{codim} \left(\bigcap_{j=1}^{p-1} H_{i_j} \right) = \text{codim} \left(\bigcap_{j=1}^p H_{i_j} \right) \cap H = p-1$$

Using the broken-circuits, we can describe $H^*(X)$ as the subvector space of the free exterior algebra \mathcal{E} over A whose basis is composed by the $H_{i_1} \wedge \dots \wedge H_{i_p}$ such that $\{H_{i_1}, \dots, H_{i_p}\}$ does not contain any broken-circuit.

On the other hand, let $C_X = \text{Lib}(H_1(X, \mathbb{Q})) / \mathcal{I}$ where \mathcal{I} is the ideal generated by the image of \mathcal{I} the dual of the cup product, be the holonomic Lie algebra of X .

Then I is the ideal generated by the $[X_i, X_j]$ where $\{H_i, H_j\}$ is not a 2-broken-circuit and X_i is the homology class associated with H_i .

$$\text{Let } \chi(p) = \dim \mathbb{E}_p(G_X) \text{ and } \chi_j(X) = \frac{\prod_i \pi_i(X)}{\prod_{j \neq i} \pi_i(X)}$$

By definition, X satisfies the LCS property iff

$$\sum_{p \geq 0} \chi(p) t^p = \prod_{j \geq 1} (1-t^j)^{-\chi_j(X)} = P_X(-t)^{-1}$$

Falk-Randell, Kohn, showed that the class of fiber-type arrangements, i.e. whose lattice of intersections is supersolvable satisfies the LCS property.

Here, we give an elementary proof of this result as a direct corollary of the theorem:

Theorem: Let A be a fiber-type arrangement. Then

$$G_X \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} \text{LiB}(A_i)$$

where $A = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} A_i$ is the partition associated with the maximal modular chain of the lattice or with the tower of fibrations given by the definition of fiber-type arrangement.

Sphere Packing and Applications

N J A Sloane
Mathematical Sciences Research Center
AT&T Bell Labs
Murray Hill, New Jersey USA

July 4 1988

Summary

This talk will describe one of the oldest problems in geometry, the ~~sp~~ sphere packing problem, and will show how it is related to several problems of digital communication, and in particular to the problem of constructing codes for use on a band-limited channel. Besides the sphere packing problem, three closely related geometrical problems are also described: the kissing number problem (which asks ^{how} ~~many~~ ~~many~~ equal nonoverlapping spheres can touch another sphere of the same size), the covering problem (which asks for the most efficient way to cover space by

overlapping spheres), and the quantizing problem (which asks for the best lattice to use for data compression). For all four problems there has been considerable progress in recent years, and I shall describe some of these results. For example, ^{A.M.} Odlyzko and I found the ~~best~~ solution to the kissing number problem in dimensions 8 and 24 ~~(the only other dimensions)~~ (before this the answers were known only in dimensions 1, 2, 3). Later Eiichi Bannai and I showed that the answers in 8 and 24 dimensions are ^{in fact} ~~also~~ unique. For the ~~quantizing~~ quantizing problem, Eric Barnes and I proved that the body-centered cubic lattice is the optimal lattice quantizer in three dimensions, assuming the input to have a uniform distribution.

Several results concerning ~~the~~ the sphere packing problem will be described. "Laminated lattices" are defined recursively, beginning with the integer ~~one-dimensional~~ lattice in one dimension, and then taking the densest n -dimensional lattice(s) that contain any $(n-1)$ -dimensional laminated lattice as a sublattice. In 1982 J. H. Conway and I determined all laminated lattices in ~~all~~ dimensions up to 25, and found the density of ^{any} laminated lattices in dimensions up to 48, considerably extending the known results. There is a unique 24-dimensional laminated lattice, which is the Leech lattice. This is a "no-input" construction of the Leech lattice. The main reference for this talk is J. H. Conway and N. J. A. Sloane, "Sphere Packing, Lattices and Groups", Springer-Verlag, 1988. The talk will

conclude by mentioning that Motorola Inc. is
now marketing a 19.2 kbit/sec ^{MODEM} modem ~~that~~
for digital communications, that ~~it~~ uses signal
which are points in an eight-dimensional
sphere packing!

「擬斉次多項式で定義されるK3曲面の negative cycles」

筑波大学 数学科 渡辺公夫

複素解析空間 X 上の正規孤立特異点 (X, x) の基本的な不変量として、多重種数 δ_x がある。この多重種数の値が総ての自然数 m に関して、1 になるとき、その特異点を純楕円型特異点という。

定義 三次元Gorenstein純楕円型特異点で $(0, 2)$ -type のものを単純K3特異点という。

単純K3特異点は三次元純楕円型特異点の「最も簡単な」ものである。この単純K3特異点をminimal resolutionの言葉で特徴付けることができる。即ち、「三次元正規孤立特異点 (X, x) に対し、そのminimal resolutionを $f: Y \rightarrow X$ とするとき、 $D = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ が normal K3-surface ならば (X, x) は単純K3特異点である。」これは、単純K3特異点を minimal resolutionの例外集合で記述できたことを意味する。さらに三次元単純K3特異点が二次元単純楕円型特異点の拡張として妥当である、という証でもある。

次に、単純K3特異点が超曲面となるための条件を例外集合として現れる正規K3曲面の特異性で記述することを問題とする。まず考察の対象を非退化な正則関数 f で定義された単純K3特異点に限り、その例外集合として現れる正規K3曲面のlattice 構造を計算し、超曲面となるための必要条件を求めてみよう。この場合、 f が非退化であるという条件より minimal resolution は簡単に求まる。

f の Newton 図形の中に $(1, 1, 1, 1)$ を相対的内部に含む3次元の面が存在する。従って、3次元の面の方向比として四つの(正の)有理数が得られる(米村の計算によれば、これは95通りある)。これによりambient space である \mathbb{C}^4 の原点における(重み付き)blowing-upが定義できる。これから (X, x) のpartial resolutionが構成されるが、実は(一つの)minimal resolutionにもなっている。以上の事実より、例外集合として現れる正規K3曲面の代数的及び超越的サイクルを記述し、ピカールlattice の構造を決めることができる。さらには、正規K3曲面の特異点を通るWeil divisor のcomplement のintersection form を計算することにより正規K3曲面のlattice構造は完全に決定される。

さらに単純K3特異点を定義する非退化な4変数擬斉次多項式 g の一般形について調べてみよう。 g は3次元 weighted projective spaceの中でnormal K3-surface S を定義する。このとき、 S の特異点を総て通るWeil divisor D で、 $S - D$ がStein 多様体となるものが存在する。 $H_2(S - D)$ に2次形式を定義し、 $S - D$ の negative cycle を M の negative cycle とみることができる。この方法で M の transcendental negative cycle のすべてを捉えることができる。一方、解析的 de Rham 理論により $S - D$ の cycle に正則2型式が対応している。このtranscendental negative cycleに対応する正則2型式を用いると、 \mathbb{C}^4 における単純K3特異点の定義式とみた擬斉次多項式 g のweightを保った変形を表現することができる。例えば、 g が $x^2 + y^3 + z^7 + w^{42}$ のとき、結果は $x^2 + y^3 + z^7 + w^{42} + t_1 z w^{36} + t_2 z^2 w^{30} + t_3 y w^{28} + t_4 z^3 w^{24} + t_5 y z w^{22} + t_6 z^4 w^{18} + t_7 y z^2 w^{16} + t_8 z^5 w^{12} + t_9 y z^3 w^{10} + t_{10} y z^4 w^4$ となる。

Levi-Mal'cev Theorems for Smooth Poisson Algebras

August 17, 1988

Abstract:

Motivated by the classical results of Levi-Mal'cev on existence and conjugacy of semisimple subalgebras in finite-dimensional Lie algebras, we discuss in this talk the formulation and proof of analogous results for the Lie algebra of germs of smooth functions at a singular point of a smooth Poisson manifold.

Jack F. Conn

(School of Mathematics
University of Minnesota
Minneapolis, Minnesota
USA)

Potential Theory on a hypergroup

Hypergroups are locally compact spaces with group-like structures on which the bounded measures convolve in a similar way to that on a locally compact group. Important examples of hypergroups are double coset spaces and duals of compact groups; also the sets \mathbb{Z}_+ , \mathbb{R}_+ of nonnegative integers and reals respectively, the unit interval I and the unit disk D , but with operations different from the usual group operations in \mathbb{Z} , \mathbb{R} and the complex numbers \mathbb{C} respectively. In fact a hypergroup K can be viewed as a probabilistic group in the sense that for each pair $x, y \in K$ there is a probability measure $\varepsilon_x * \varepsilon_y$ on K with compact support, not necessarily equal to the Dirac measure $\varepsilon_{x \cdot y}$ for a composition $x \cdot y$ in K , such that $(x, y) \rightarrow \text{Supp}(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$ is a continuous mapping from $K \times K$ into the space $\mathcal{K}(K)$ of compact subsets of K . The convolution $*$ extends to all bounded measures on K and shifts the algebraic-topological analysis from K to the generalized measure algebra $M^b(K)$ of K .

In the talk to be given we will restrict ourselves to commutative hypergroups which admit a Haar measure and the usual "Abelian" harmonic analysis.

The speaker plans to give a survey of recent results mainly published by himself together with Professor W.R. Bloom from Murdoch University, Perth (Western Australia), on the transience of continuous convolution semigroups on K which correspond to space (and time-) homogeneous Markov processes taking

values in K . It turns out that on a large class of commutative hypergroups all adapted convolution semigroups are necessarily transient, and that the potential kernels of transient convolution semigroups are exactly the perfect kernels in the sense of J. Deny (generalized to hypergroups)

Recent reference:

W.R. Bloom, H. Heyer: Characterization of potential kernels of transient convolution semigroups on a commutative hypergroup.

To appear in: Proceedings of the Conference
"Probability Measures on Groups IX"

Springer Lecture Notes in Math. 1989

複素2進展開と777777

伊藤 俊次 (津田塾大学)

$\mathbb{Z}(\sqrt{-m})$, $m=1, 2, \dots$ は虚2次体の整数と可也。

$\alpha \in \mathbb{Z}(\sqrt{-m})$, $\mathcal{D} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}(\sqrt{-m})$ の pair (α, \mathcal{D}) の number system と可也とは 2次の多項式を定義可也。

$$\forall z \in \mathbb{Z}(\sqrt{-m}) \text{ に対して } \exists a_k \in \mathcal{D} \ (0 \leq k \leq n)$$

$$z = \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k$$

ここに N とは α の

$$\text{例として } \mathbb{Z}(i) \text{ においては } \alpha = -1+i, \mathcal{D} = \{0, 1\}$$

と可也と可也, (α, \mathcal{D}) は number system と可也, 777777

15 として Gauss 整数 $z \in \mathbb{Z}(i)$ は

$$z = \sum_{k=0}^n a_k (-1+i)^k \quad a_k \in \{0, 1\}$$

と表わす可也と可也, 2次の多項式と可也。

この講義では 2次の結果を可也可也可也可也可也可也。

命題1 $\mathbb{Z}(\sqrt{-m})$ は虚2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ の整数と可也。

$\alpha \in \mathbb{Z}(\sqrt{-m})$, $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, N(\alpha)-1\}$ と可也。

2次の可也 (α, \mathcal{D}) の number system と可也 必要十分条件は

(1) $-m \equiv 2, 3 \pmod{4}$ の可也

$$\alpha = -n \pm \sqrt{-m} \quad n=0, 1, 2, \dots$$

(但し, $m=1$ の可也は $n=1, 2, \dots$)

(2) $-m \equiv 1 \pmod{4}$ の可也

$$\alpha = \frac{-2n+1 \pm \sqrt{-m}}{2} \quad n=0, 1, 2, \dots$$

(但し, $m=3$ の可也は $n=1, 2, \dots$)

命題2 (α, \mathcal{D}) は 命題1 の条件と可也可也可也。 $X_\alpha \in$

$$X_\alpha := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \alpha^{-k} \mid a_k \in \mathcal{D} \right\}$$

と可也。 2次の可也 X_α は 2次の性質と可也。

(1) space tiling property : $\bigcup_{z \in \mathbb{Z}(\sqrt{-m})} (X_\alpha + z) = \mathbb{C}$ (複素平面)

$$\text{int.}(X_\alpha + z) \cap \text{int.}(X_\alpha + z') = \emptyset \quad (z \neq z')$$

(2) self similarity : $\alpha \cdot X_\alpha = \bigcup_{k=0}^{N-1} (X_\alpha + k)$

(3) $\text{int.} X_\alpha \ni 0$

$$(4) \dim_H \partial X_\alpha = \frac{2 \log \lambda_n}{\log N(\alpha)}$$

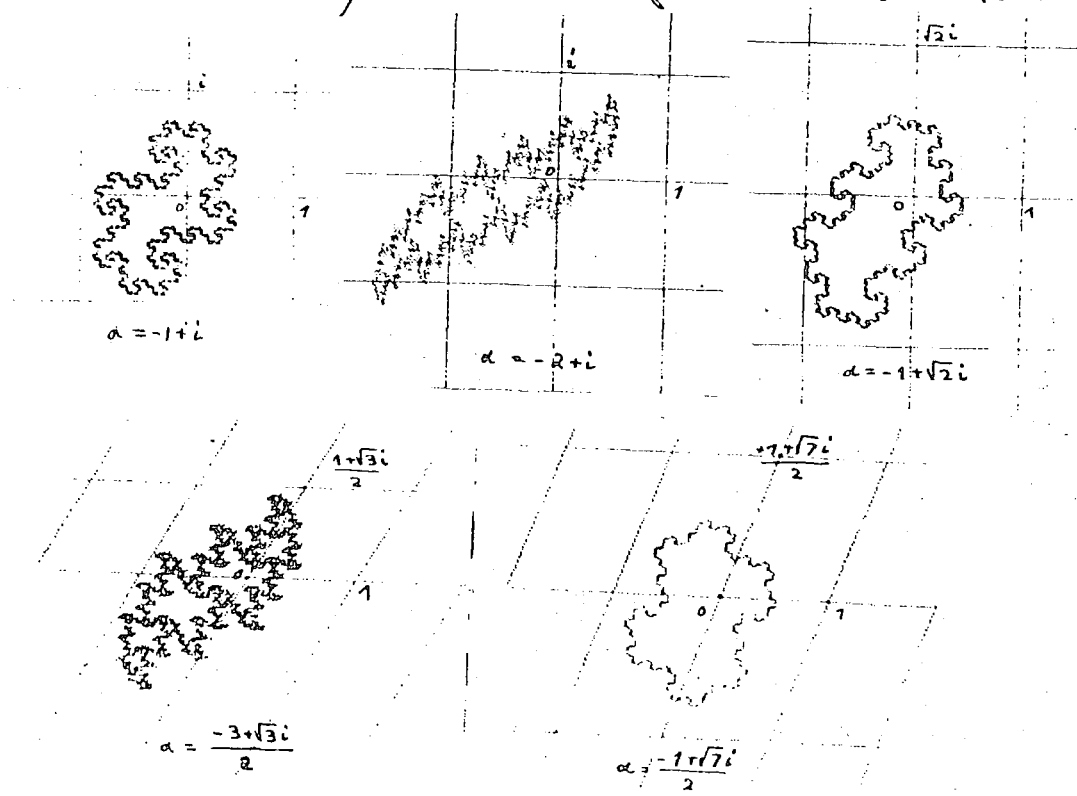
ここで λ_n は 2 次の 3 次方程式の最大実根

$$\lambda^3 - (2n-1)\lambda^2 - (N-2n)\lambda - N = 0 \quad \text{if } -m \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ n=1, 2, \dots$$

$$\lambda^3 - (2n-2)\lambda^2 - (N-2n+1)\lambda - N = 0 \quad \text{if } -m \equiv 1 \pmod{4} \\ n=1, 2, \dots$$

$$\lambda^3 - (N-1)\lambda - N = 0 \quad \text{if } -m \equiv 1 \pmod{4} \text{ and } n=0$$

X_α の boundary は F の 1 つ fractal である。 (註文参照。 Tokyo Journal など)



多変数の Galois 表現について

この話では 総実代数体 F と奇素数 $p > 2$ を固定して話を進める. F から一度与えられると 次の3つの研究材料が得られる:

- ① S_R : 重さ k の正則な係型形式の空間
 ただし S_R は 代数群 GL_2/F の p 中 level の cusp form の空間で, \mathbb{Q} 上代数的な Fourier 係数をもつもの全体の空間である. $\overline{\mathbb{Q}} \in \mathbb{C}$ の中で \mathbb{Q} 上代数的な数全体の空間とすると S_R は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上無限次元の vector 空間である.
- ② \overline{S} : p -進係型形式の全体 = S_R の p -進完備化 (k に依存しない).
- ③ \mathfrak{h} : p -進 Hecke algebra = $\text{End}(\overline{S})$ の subalgebra で位相的に Hecke 作用素 $T(n)$ で生成されるもの.
 (ここで \mathfrak{h} の定義は詳しく述べる)

ここで \mathfrak{h} は pro-artinian ring ; すなわち, \mathbb{Z}_p 上の Artin 環 (= \mathbb{Z}_p -algebra でその数が有限なもの) の射影的極限と表わされてよく compact 環である. かなりやさしい \mathbb{Z}_p 上の pro-Artin 環の例としては \mathbb{Z}_p の有限拡大や 中級数環 $\mathbb{Z}_p[[X_1, \dots, X_s]]$ 等がある. 次の定理が \mathfrak{h} と Galois 表現との関係の原理を与えてくれる:

Principle-Theorem : $A \in \{\overbrace{\mathbb{Z}_p \text{ 上の}}^{\text{pro-artinian integral domain}} \text{ かつ } K \in \text{その商体とある. 連続な } \mathbb{Z}_p\text{-algebra の準同型 } \lambda: \mathfrak{h} \rightarrow A \text{ がある}\}$
 与えられるならば, この λ に対応して 連続な Galois 表現

$$\pi(\lambda): \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \rightarrow GL_2(K)$$

が一意的に存在して次をみたす.

- (i) $\pi(\lambda)$ は 完全可約 (semi-simple) でかつ p の外で不分裂
- (ii) $\sigma_f \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ の素 ideal f に対応する Frobenius 置換とすると

$$\det(1 - \pi(\lambda)(\sigma_f)X) = 1 - \lambda(T(f))X + \lambda(\langle f \rangle)X^2$$

が成り立つ. ここで $\langle f \rangle$ は diamond operator と呼ばれる Hecke 作用素で表わせば $\langle f \rangle = T(f)^2 - T(f^2)$ である.

① $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{F}_p \supset \mathbb{F}_p$ $N(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$

$F \supset \mathbb{Q}$ 不分解性により 少く解説を加える. \mathbb{Q} の中の整数環 (互素 monic な多項式の根全体) を \mathcal{O} と書き F の整数環を \mathcal{O}_F と書く. $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}/F)$ が \mathcal{O} の素 ideal \mathfrak{p} により $\mathfrak{p}^\sigma = \mathfrak{p}$ かつ $x \in \mathcal{O}$ により $x^\sigma \bmod \mathfrak{p} = x^{N(\mathfrak{p})} \bmod \mathfrak{p}$ となることを \mathfrak{p} の Frobenius 置換という. ここで $\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}$ で $N(\mathfrak{p}) = \#(\mathcal{O}/\mathfrak{p})$ である. σ は \mathfrak{p} により一意的に定まる訳ではない. 実際 定義から明らかで如く $\text{Gal}(\mathbb{Q}/F)$ の部分群, これは惰性群と呼ばれる, を

$$I_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}} = \{ \sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}/F) \mid \mathfrak{p}^\sigma = \mathfrak{p} \text{ かつ 全ての } x \in \mathcal{O} \text{ により } x \equiv x^\sigma \bmod \mathfrak{p} \}$$
 と定義すると \mathfrak{p} の Frobenius 置換全体は $I_{\mathfrak{p}}$ の coset である. $I_{\mathfrak{p}}$ の共役類は \mathfrak{p} で定まるので $I_{\mathfrak{p}}$ と書き \mathfrak{p} の惰性群と呼ばれる. $\pi: \text{Gal}(\mathbb{Q}/F) \rightarrow \text{GL}_2(K)$ を表現とすると, $\mathfrak{p} \nmid p$ なる \mathcal{O} の素 ideal \mathfrak{p} により取った \mathfrak{p} の Frobenius 置換 σ により $\pi(\sigma)$ の共役類が $\mathfrak{p} = \mathcal{O} \cap \mathfrak{p}$ のように依りて定まること π を p の外で不分解という. (これは $\text{Ker}(\pi) \supset I_{\mathfrak{p}}$ と同値である). π が p の外で不分解ならば

Frobenius 置換の全体の π による像は $\text{Im}(\pi)$ の中で dense であることが知られており, $\pi(\lambda)$ の連続性と (iii) の条件により $\pi(\lambda)$ は一意に定まる.

よって $f \in S_k$ がすべての $T(n)$ の同時固有関数ならば algebra の準同型 $\lambda: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ を $f|T(n) = \lambda(T(n))f$ で定めることが出来る. この λ の像は \mathbb{Z}_p の有限拡大, すなわち, pro-arithmetic ring に属することが知られており Th. により f に伴う Galois 表現 $\pi(f)$ を得る. このような cusp form に対する Galois 表現の研究には歴史がある. これは志村先生に始まる研究で 太田 及び Tunnell - Rogawski による

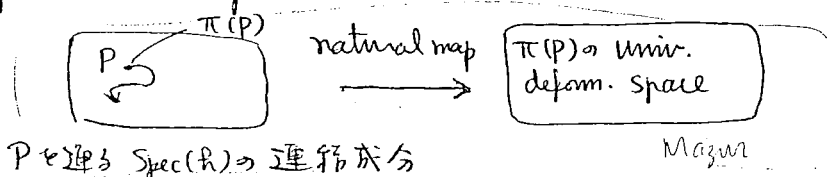
$[F:\mathbb{Q}]$ が奇数なる $\pi(f)$ の全部
 $[F:\mathbb{Q}]$ が偶数なる $\pi(f)$ の大半を構成した.

逆に言えば $[F:\mathbb{Q}]$ が偶数なら 同時固有関数から いって Galois 表現 が 作れる 訳でなく missing representation が ある 訳である. ところが 最近 Wiles と 著弟子 Taylor に 対して この missing representation の 構成法 が 見つかった. 我々の定理の証明 は 二人の 人々 への Wiles と 負う所が 大きい.

この定理より $A \in \mathbb{Q}_p$ への 代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ とすると

$$\mathrm{Spec}(R)(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p\text{-alg}}(R, A) + \text{代数幾何的位相}$$

の空間を 与えて 幾何的に 見ると, 各点 $P \in \mathrm{Spec}(R)$ には Galois 表現 $\pi(P)$ が 対応する. P を動かすと $\pi(P)$ は それに応じて deform (変形) する 訳である. これより P を通る $\mathrm{Spec}(R)$ の 連結成分 から $\pi(P)$ の (Mazur に 対して 存在の証明された) universal deformation space の scheme の 写像 が 得られる:



この 写像 が 全射 か どうか は 一つの 重要な 問題 である.

これらのことから R の 構造 の 研究 は かなりの 意味 がある. 例えば $R \rightarrow \mathbb{Z}_p[[X_1, \dots, X_s]]$ なる algebra の 全射準同型 を 与えれば 自動的に 多変数の Galois 表現 $\pi(\lambda): \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p[[X_1, \dots, X_s]])$ を 得る 訳である. F が \mathbb{Q} の 真の 拡大 体 だと $\mathrm{usp form}$ の weight k は F の \mathbb{Q} への 埋め込み に対して parametrized された 正の 整数 の 組 である: $k = (k_\sigma)_{\sigma \in I}$ で $I = \{F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}\}$ である. $k_\sigma \neq k_\tau$ かつ k を multiple, また $\sigma \neq \tau$ かつ $k_\sigma = k_\tau$ かつ k を parallel weight と 呼ぶ. multiple weight の $\mathrm{usp form}$ の 存在 が $[F:\mathbb{Q}]$ が 大きくなる ほど R が 非常に 大きくなる. R 全体の 構造 を 決定するのは 難しいから 先の 易い 部分 を 見つけ出し それを 研究 しよう. この 易い 部分は nearly ordinary part と 呼ばれる.

Nearly Ordinary point の定義は algebraic 点と analytic 点と 2 つあり analytic 点の方は 見かけは 3 重に書かれている。
 だが algebraic 点にも同じ 述べる。 $\lambda: k \rightarrow A$ に対応する
 Galois 表現 $\pi(\lambda)$ が nearly ordinary であるとは p を割る
 \mathcal{O} の素 ideal \mathfrak{p} を取ると、 $\pi(\lambda)$ の \mathfrak{p} の局所性群 $I_{\mathfrak{p}}$ への
 制限が 可約 であること、すなわち 適当な $\pi(\lambda)$ の共役を取れば
 $\pi(\lambda)(I_{\mathfrak{p}}) \subset \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ とする こと 12 定義する。 このとき
 代数的 nearly ordinary point k_0 は

$$k_0 = k / (\cap \ker \lambda)$$

$$\pi(\lambda): n.\text{ord}$$

で 定義される。 後で述べる 解析的 定義の方が (見かけは) 3 重に
 この 2 番目の 定義による nearly ordinary point $k^{n.\text{ord}}$ は k_0 の
 剰余環 である。 解析的 定義は あと 回しに $k^{n.\text{ord}}$ の 構造 について
 結果を述べる:

Theorem $d = [F:\mathbb{Q}]$ とおく

- ① ある 整数 s で $d+1 \leq s < 2d$ をみたすものがあって
 k は $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[X_1, X_2, \dots, X_s]]$ 上の algebra である。
- ② $k^{n.\text{ord}}$ は reduced, すなわち nil radical を持たない
- ③ $k^{n.\text{ord}}$ は Λ 上 torsion-free かつ 階数有限 である。
- ④ (F, p) に関する Leopoldt conj. が 正しいならば $(s = d+1 \text{ である。})$ である。

この定理により $k^{n.\text{ord}}$ は 大体 Λ あるいは 其の有限次拡大の 積 である。
 これにより $\lambda: k^{n.\text{ord}} \rightarrow \Lambda$ あるいは 其の有限次拡大への 全射準同型
 を 多く 得ることが 出来る, 多変数の Galois 表現を 構成 することが
 出来る。

さて $k^{n.\text{ord}}$ と k の 定義を 述べたが, For cusp form の weight は
 $(k_\sigma)_{\sigma \in I}$ だったから $k = \sum_{\sigma} k_{\sigma} \cdot \sigma$ とおくと $I \subset \mathbb{Z}$ 生成される
 $\cap = \dots$

↑は $\det > 0$ の系

自由加群 $\mathbb{Z}[I] = \sum_{\sigma \in I} \mathbb{Z}\sigma$ の元 γ は $\gamma \in \mathbb{Z}[I]$ である。実際は次の保型因子に対応する 2 行の weight (k, ν) を与える:

$$j_{k, \nu} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) = \prod_{\sigma \in I} (\det(\gamma_{\sigma})^{\nu_{\sigma}-1}) (c^{\sigma} z_{\sigma} + d^{\sigma})^{k_{\sigma}}$$

ここで $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(F)$ であり (上半平面 H に m 回 $z = (z_{\sigma})_{\sigma \in I} \in H^I$ である。

Γ が $GL_2^+(\mathbb{Q})$ の 合同部分群 であるならば $f \in S_{k, \nu}(\Gamma)$ は次の不変性を持つ H^I 上の正則関数である:

$$f(\gamma(z)) = f(z) j_{k, \nu}(\gamma, z) \quad \gamma \in \Gamma, \quad + \text{ 尖角条件}$$

ここで 行列式が totally positive かつ $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は

$$(z_{\sigma}) \mapsto \left(\frac{a^{\sigma} z_{\sigma} + b^{\sigma}}{c^{\sigma} z_{\sigma} + d^{\sigma}} \right)_{\sigma} \quad \text{で } H^I \text{ に作用する。}$$

また F の単数 $\varepsilon \in \Gamma \cap F^{\times}$ は H^I に trivial に作用する。

これより $f(z) = f(\varepsilon(z)) = f(z) j_{k, \nu}(\varepsilon, z)$ であり $f(z) \neq 0$ であるためには

$$j_{k, \nu}(\varepsilon, z) = \prod_{\sigma} (\varepsilon^{\sigma})^{k_{\sigma} + \nu_{\sigma} - 2} = \varepsilon^{k + 2\nu - 2t} = 1$$

でなければならない。ここで $t = \sum_{\sigma} \sigma$ である。このことから

実際 与えられる weight は

$$W = \{ (k, \nu) \in \mathbb{Z}[I] \times \mathbb{Z}[I] \mid k + 2\nu \in \mathbb{Z} \cdot t \}$$

の元である。かんたん $\text{rank } W = d+1$ かわかり したがって

実際 k の変数の数を与える。

Hecke 作用系を与えるには adèle 付いた modular form を与えるなければならない。 \mathbb{Q}_q での \mathbb{Q} の q -進完備化とあるとき F の adèle 環

F_A は

$$F_A = F + \prod_{\mathfrak{p}} \hat{\mathbb{O}}_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\sigma \in I} \mathbb{R} \subset \prod_{\mathfrak{p}} F_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\sigma \in I} \mathbb{R} = X$$

である。ここで F の元は X に $(a, \dots, a, (a^{\sigma})_{\sigma \in I})^{(a^{\sigma})}$ と対角に埋め

込まれている。また $F_A = F_f \times \prod_{\sigma \in I} \mathbb{R}$ である。さて $GL_2(F_f)$ の部分群で

$$U_0(p^r) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\hat{\mathbb{O}}) \mid c \equiv 0 \pmod{p^r} \right\},$$

$$U_1(p^r) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_0(p^r) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{p^r} \right\}.$$

また $GL_2(F_A)$ 上の modular form かつ $GL_2(F)$ -不変 $GL_2(F_A)$ 上の関数

4)2 右から $U(p^r)$ -不変物である。すなわち $f: GL_2(F_A) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\alpha \in GL_2(F) \quad u = (u_f, u_\infty) \in U(p^r) \times \prod_{\sigma} \mathbb{R}^\times SO(2, \mathbb{R})$$

$$f(\alpha u) = f(\alpha) j_{k, \nu}(u_\infty, z_0)^{-1} \quad (z_0 = (\sqrt{f_1}, \dots, \sqrt{f_r}))$$

をみたす。 $S_{k, \nu}(U(p^r))$ の元はこれに加えて 正則性条件 と 尖突条件 をみたすが、これは技術的なので触れずにおく。

$$GL_2^+(F_\infty)/C \cong H^1 \quad \text{だから} \quad f \in S_{k, \nu}(U(p^r)) \text{ は}$$

$$\downarrow$$

$$g \longmapsto g(z_0)$$

本質的に $\underbrace{GL_2(F) \backslash GL_2(F_f) / U(p^r)}_{\text{有限集合}} \times H^1$ 上の関数である

==> $GL_2(F) \backslash GL_2(F_f) / U(p^r)$ の代表系を $\{x_i\}$ とする

$$\Gamma_i = x_i U(p^r) x_i^{-1} \cap GL_2^+(F) \quad \text{に} \quad$$

$$S_{k, \nu}(U(p^r)) \cong \bigoplus_i S_{k, \nu}(\Gamma_i)$$

$$f \longmapsto \tilde{f}(z) = f(x_i \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) y^{\nu-t} \quad z = x+iy \quad (U = U(p^r))$$

ある。さて $y \in GL_2(F_f)$ に $UyU = \bigsqcup_i y_i U$ と分解して

$$f(T(y))(\alpha) = \sum_i f(\alpha y_i) \quad \text{と表わす}$$

$T(y) \in \text{End}(S_{k, \nu}(U(p^r)))$ である。よく $T(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \in T(p)$ とおく。

==> Hecke algebra $\mathcal{H}_{k, \nu}(p; \mathbb{Z})$ は $\text{End}(S_{k, \nu}(U(p^r)))$

の subalgebra で $\mathbb{Z} \ni T(y) \quad (y \in M_2(\hat{\mathbb{O}}) \cap GL_2(F_f), y \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{p^r})$
 と $p^r T(p)$ で生成されるものである。この事実が知られている。^{unit}

ii) $\mathcal{H}_{k, \nu}(p; \mathbb{Z})$ は \mathbb{Z} 上階数有限かつ可換である ($T(p)$ の固有値は p^r の倍数)

iii) $T: U_0(p^r)/U(p^r) \rightarrow \mathcal{H}_{k, \nu}(p; \mathbb{Z})$ は群の character である。
 $y \longmapsto T(y)$

$$\text{定義より} \quad U_0(p^r)/U(p^r) \cong (\mathbb{O}/p^r\mathbb{O})^\times \times (\mathbb{O}/p^r\mathbb{O})^\times \quad \text{で}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a, d)$$

対角写像 $\mathbb{O}^\times \subset U_0(p^r)/U(p^r)$ の部分群の上へ移すことができる。

つまり $e \in \mathbb{O}^\times$ ならば $T(e) = 1$ である。

(iii) $r > s$ なる $h_{R,U}(p^r; \mathbb{Z}) \rightarrow h_{R,U}(p^s; \mathbb{Z})$ なる algebra の準同型 $T(y)$ を $T(y)$ に持ち移すことができる。

(ii) 上) $h_{R,U}(p^r; \mathbb{Z})$ は 辞環 $\mathbb{Z}[(\mathcal{O}/p^r\mathcal{O})^{\times}/\mathcal{O}^{\times}]$ 上の algebra である。 $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ $h_{R,U}(p^r; \mathbb{Z}_p) = h_{R,U}(p^r; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ である

(iii) の map τ 射影的標本を取れば 結果は (R,U) と独立で

$$h = \varprojlim_r h_{R,U}(p^r; \mathbb{Z}_p)$$

が Hecke algebra の定義である。 h は自然に

(iv) $A = \varprojlim_r \mathbb{Z}_p[(\mathcal{O}/p^r\mathcal{O})^{\times}/\mathcal{O}^{\times}]$ 上の algebra である。

A が自然に $\mathbb{Z}_p[[X_1, \dots, X_s]]$ なる algebra を含み込んでいることは容易である。 最後に h の ideal σ が nearly ordinary

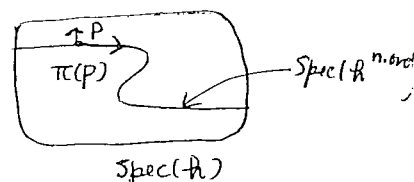
というとき $p^{-v}T(p) \in (h/\sigma)^{\times}$ と定義する。 $\sigma \in \sigma$

$$h^{n, \text{ord}} = h / \bigcap_{\sigma: n, \text{ord}} \sigma \quad \text{と定義される}$$

Theorem. $t: \lambda: h^{n, \text{ord}} \rightarrow A$ なる algebra の準同型 $\pi(\lambda)$ は nearly ordinary である。

このことから $h_0 \twoheadrightarrow h^{n, \text{ord}}$ の全射性が出る。 二つを幾何的に見れば

右図で $P \in \text{Spec}(h^{n, \text{ord}})$ 上で動かせば nearly ordinarity を保ち $\text{Spec}(h^{n, \text{ord}})$ の法線方向に動かせば nearly ordinarity を壊すのだけが良いと 思われている。



$$\pi(\lambda) \cdot \lambda(P) \neq 0 \Leftrightarrow \text{nearby ord} \Leftrightarrow \chi(\pi(P)) \neq 0$$

$F = \mathbb{Q}$ ときは Weight 12 の Ramanujan の Δ -関数がある

この $T(p)$ に関する固有値が $11 \leq p < 19000$ から $p \neq 2411$ ならば

\mathbb{Z}_p^{\times} に入るから 前田芳彦氏の研究で 知られており ときは

$h^{n, \text{ord}} \neq 0$ である。 F/\mathbb{Q} が 可解拡大なる 土井-表沼-Langlands

の base change の理論で $h^{n, \text{ord}}/F \rightarrow h^{n, \text{ord}}/\mathbb{Q}$ なる 全射準同型

が作れるので 同一条件下で $h^{n, \text{ord}} \neq 0$ である。 F/\mathbb{Q} が non-solvable 拡大とき $h^{n, \text{ord}} \neq 0$ する例は知られていない。

直交群の量子化

筑波大学数学系 竹内 光弘

$n \times n$ 行列 $X = (x_{ij})$ の成分で生成された, 体 k 上の free algebra $k\langle X \rangle$ を考え, これは

$$\Delta x_{ij} = \sum_{s=1}^n x_{is} \otimes x_{sj}, \quad \varepsilon x_{ij} = \delta_{ij}$$

により bialgebra の構造を入れる.

$n^2 \times n^2$ 行列 $X^{(2)} \in (x_{ik} x_{je})_{(ij)(ke)}$ とする. 一般に, k 係数 $n^2 \times n^2$ 行列 T に対し relation

$$(R_T) \quad X^{(2)} T = T X^{(2)}$$

は $k\langle X \rangle$ の quotient bialgebra $k\langle X \rangle / (R_T)$ を定める. たゞこれは

$$T = \sum_{i,j} E_{(ij)(ji)}$$

に対しては, $k\langle X \rangle / (R_T) = k[\{x_{ij}\}]$ (77 項式環) であり, これは

$d = \det X$ の逆元 d^{-1} を添加することにより, $GL(n)$ のホップ代数がえられる.

同じ T と もう一つ べきとなる $n^2 \times n^2$ 行列 E (k 係数) をとり, $k\langle X \rangle / (R_T,$

$R_E)$ を同様にホップ化したものから $O(n), Sp(n)$ のホップ代数がえられる

ことも分る. このことに着目して T (と E) を "量子化" したことから同様の

プロセスを経て, $GL(n), O(n), Sp(n)$ など を "量子化" することを考える.

A 型 $\hbar \neq 0 \in k$ とする.

$$T_f^A = f \sum_i E_{(i)(i)} + \sum_{i \neq j} E_{(ij)(ji)} + (f-f^{-1}) \sum_{i < j} E_{(j)(i)}$$

に對し $M_f^A(n) = k\langle X \rangle / (R_{T_f^A})$ とおく. ある central group-like

$d_f^A \in M_f^A(n)$ (A 型 f -行列式) が存在し, $M_f^A(n)[(d_f^A)^{-1}]$ は

ホップ代数になる. 之れが $GL_f^A(n)$ (A 型の量子化) を定める.

B 型 $f^{\frac{1}{2}} \neq 0 \in k$ とする. $n = 2m+1$ とし, $1 \leq i \leq n$ に對し

$$i' = n+1-i, \quad \bar{i} = i + \frac{1}{2} \quad (i < m+1), \quad i \quad (i = m+1), \quad i - \frac{1}{2} \quad (i > m+1)$$

とおく.

$$T_f^B = f \sum_{i \neq i'} E_{(i)(i')} + \sum_{i \neq j, j'} E_{(ij)(j'i)} + (f-f^{-1}) \sum_{\substack{i < j \\ i \neq j'}} E_{(j)(i)} + \sum_{i' \leq k} a_{ik} E_{(i)(i'k)}$$

$$\left(i \leq 2^n \quad a_{ik} = \begin{cases} 1 & i=k=m+1 \\ f^{-1} & i \neq i'=k \\ (f-f^{-1})(\delta_{ik} - f^{\bar{i}-\bar{k}}) & i' < k \end{cases} \right)$$

とおくと $E_f^B = \frac{1}{f^2-1} (T_f - f)(T_f + f^{-1})$ は $rk 1$ の行列になる.

$M_f^B(n) = k\langle X \rangle / (R_{T_f^B}, R_{E_f^B})$ とおく.

Thm $\exists r \in M_f^B(n)$ central group-like s.t. $X\tilde{X} = \tilde{X}X = rE$.

$$\text{すなわち} \quad \tilde{X} = (f^{\bar{i}-\bar{i}'} x_{f i' i}).$$

すなわち $M_f^B(n)[r^{-1}]$ はホップ代数になる.

quotient Hopf alg. $M_f^B(n)/(r-1)$ のある量子群 $Q_f(n)$ とおき,

これを直交群 $O(n)$ の量子化と考える. ($\hbar=1$ のときは $O(n)$ に一致する).

一方で $GL_{\hbar}^A(n)$ は, T_{\hbar}^A の固有空間 ($\hbar, -\hbar^{-1}$ に対応した) 2 つあるの定める 2 次代数から, end をとることによっても構成できる.

T_{\hbar}^B は 3 つの固有空間 ($\hbar, -\hbar^{-1}, \hbar^{-n}$) をもつので, \hbar と \hbar^{-n} の固有空間をまとめて 2 つにすれば, 同様のプロセスで $GL(n)$ の B 型量子化

$GL_{\hbar}^B(n)$ がえられる. (ただし \hbar -行列式の centrality は $n=3, 5$ のときのみ分る. 一般に 0 になる). $O_{\hbar}(n)$ は $GL_{\hbar}^B(n)$ の部分量子群である.

同様に, C 型, D 型の T_{\hbar}^C, T_{\hbar}^D からそれぞれ $Sp(n), O(n)$

(ともに $n=2m$) の量子化 $Sp_{\hbar}(n), O_{\hbar}(n)$ がえられ, これらは

それぞれ $GL_{\hbar}^C(n), GL_{\hbar}^D(n)$ の部分量子群である.

小平消滅定理と群作用

1988. 9. 27

阪部 晶天 (東大・理)

なんらかの意味で“曲率が正”という状況と，“コンパクトな連結群の作用が存在する”という状況との間には，漠然とした類似がある。

例えば，コンパクトなスピンドル多様体 M に対して次の定理が成り立つ。

定理 (Lichnerowicz) 到る所スカラー曲率が正となるリーマン計量が存在すれば， M の \hat{A} -種数 $\hat{A}(M)$ は零である。

定理 (Atiyah-Hirzebruch) M が自明でない S^1 の作用を許容すれば， $\hat{A}(M) = 0$ である。

しかも，この場合，次の定理は両者の間の関連を示唆している。

定理 (Lawson-Yau) M が非アーベルなコンパクト連結リー群の作用を許容すれば， M は到る所スカラー曲率が正となるリーマン計量を許容する。

上のような類似に対する状況証拠は他にも指摘することが出来る。一例として，ここでは小平消滅定理ととりあげてみたい。

複素幾何学では，Riemann-Roch 定理と小平消滅定理が二つの強力な道具であることは論をまたない。群作用の立場からみると，Riemann-Roch は Atiyah-Singer の G 指数定理という対応物をもつ。しかし，小平消滅定理にはそのような対応物はない。定理の前提に“複素線束の正値性”という概念があり，これを一般化することは不可能であろう。

定理 (小平) M をコンパクト複素多様体， E を“正値”複素線束とする。そのとき，

$$H^i(M; \Omega^n(E)) = 0 \quad i > 0$$

が成り立つ。ここで $n = \dim M$ 。

一般に、群 G が M と複素ベクトル束 V に作用しているとき、 G は $H^i(M; \Omega^n(V))$ に作用し、Euler 指標

$$\chi(M; \Omega^n(V)) = \sum (-1)^i H^i(M; \Omega^n(V))$$

は群の指標環 $R(G)$ の元 (virtual character) になる。
今、考えている場合には、小平消滅定理により、

$$\chi(M; \Omega^n(\xi)) = H^0(M; \Omega^n(\xi))$$

は単なる virtual character ではなく、真の表現 (honest character) である。

一方、Atiyah-Singer により $\chi(M; \Omega^n(\xi))$ は M 上のある楕円複体の指数として表えられる。したがって、その正値性が意味をもつ場合には、小平消滅定理の類似を定式化することが出来る。

非常に限られた場合ではあるが、上のよう定式化を予想として提出し、いくつかの場合にその予想が正しいことを示すのか、この話の目的である。

Fractional Dimension and Homoclinic Bifurcations

J. Palis — I.M.P.A. , Brasil

One of the most important concept in Dynamics is that of homoclinic orbits. If they are transversal, then by Birkhoff(1935), they must be accumulated by periodic orbits and by Smale(1965), they are part of a hyperbolic set. Poincaré, who introduced the concept late last century, expressed his amazement about the richness, in terms of dynamics, of such phenomenon.

By 1975, I started examining, with Newhouse, the creation and unfolding of homoclinic tangencies(new homoclinic orbits), and in more recent results with Takens(Annals of Math. 1987) we introduced the notion of fractional dimensions in this context.

THEOREM. (Palis-Takens) *Let f_μ be a 1-parameter family of surface diffeomorphisms such for $\mu = 0$ we have a homoclinic tangency x associated to a basic hyperbolic set Λ , and suppose the tangency is quadratic and unfolds generically. Let U_μ be a neighborhood of the orbit of x and Λ and let*

$$H_\delta = \{\mu \in [-\delta, \delta]; \text{ the maximal invariant set for } f_\mu \text{ in } U_\mu \text{ is hyperbolic}\}.$$

Then if $HD^s(\Lambda) + HD^u(\Lambda) < 1$, then $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(H_\delta)}{\delta} = 1$.

Here m denotes Lebesgue measure and $HD^s(\Lambda)$, $HD^u(\Lambda)$ the Hausdorff dimensions of the stable, unstable foliations of Λ .

THEOREM. (Palis-Yoccoz, in preparation) *Same as previous theorem but now $HD^s(\Lambda) + HD^u(\Lambda) > 1$. Then, for most families f_μ , $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(H_\delta)}{\delta} < 1$!*

Thus, much of the dynamics of f_μ near Λ and the orbit of x , for μ small, is determined by the Hausdorff dimension of Λ .

Questions inspired by the above theorems:

- 1) Is limsup smaller than one in the second theorem, and for most families f_μ ?
- 2) For affine Cantor sets A and B in the line, is it true that $A - B$ either has measure zero or contains intervals ?
- 3) Same for regular Cantor sets.

— October 11, 1988 —

自由ホモトピー類集合の初等的性質

63.10.26 菅原正博 (広島大理)

位相空間 X, Y に対し, X から Y への連続写像の自由ホモトピー類の集合を $[X, Y]$ とかく.

定理 写像 $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とし, $N \geq 1$ とするとき, 次の条件は互に同値となる.

(1) 任意の $x \in X$ に対し, 導同形写像 ($n=0$ のときは単なる写像)

$$f_x: \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$$

は $n < N$ のとき全単射で, $n = N$ のとき全射.

(2) 任意の CW-複体 K に対し, 写像

$$f_x: [K, X] \rightarrow [K, Y]$$

は $\dim K < N$ のとき全単射で, $n = N$ のとき全射.

(2') $K = *$ または S^n ($n \geq 1$) に対し (2) が成り立ち, $K = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} S^1_\lambda$ ($S^1_\lambda \simeq S^1$, Λ は任意の集合) に対し f_x が全射.

基点に関するホモトピー類集合については, K は有限 CW-複体として条件の同値が成り立つが, 自由ホモトピーの場合には, K は有限 CW-複体に制限しては成り立たず, 条件の同値が成り立たない. 反例が Eilenberg-Mac Lane 複体を用いて成り立つ.

(鈴木浩夫 記)

1988年10月26日

Brauer 対応と Glauberman 対応

帝塚山大学

永尾 汎

§1 Glauberman 対応

群 A が群 G に作用しているとき

$$C_G(A) = \{g \in G \mid g^a = g \text{ (} \forall a \in A \text{)}\}$$

とおく。

(以下群はすべて有限群とする。)

このとき A は G の (\mathbb{C} 上の) 既約指標の集合 $\text{Irr}(G)$ に作用する: $\chi^a(g) := \chi(g^{a^{-1}})$ ($\chi \in \text{Irr}(G)$, $a \in A$)。

A -不変な既約指標の全体を $\text{Irr}_A(G)$ と表す。

このとき Glauberman は次のことを示した。

定理 1 (Glauberman; Can. J. Math. 20 (1968))

$(|A|, |G|) = 1$ かつ A が solvable ならば,
自然な全単射

$$\pi = \pi(G, A): \text{Irr}_A(G) \longrightarrow \text{Irr}(C_G(A))$$

が一意的に定まる。

上の定理で A が non-solvable と仮定すると,

Fert-Thompson の定理から $|A|$ は even, $|G|$ は odd となる。この場合 Isaacs は次のように示した。

定理 2 (Isaacs)

$(|A|, |G|) = 1$, かつ $|G|$ が odd のとき, 全単射

$$\pi(G, A): \text{Irr}_A(G) \longrightarrow \text{Irr}(C_G(A))$$

が一意的に定まる。

上の二定理で重複する場合, すなわち $(|A|, |G|) = 1$ で A が solvable かつ $|G|$ が odd のとき, 2つの対応は一致することを Wolf が示して, $(|A|, |G|) = 1$ の場合, $\text{Irr}_A(G)$ と $\text{Irr}(C_G(A))$ の関係は完全に明らかになった。

定理 1 で A が cyclic または p -群のとき, 対応 π は次の

ようになっている。

- (1) $A = \langle \sigma \rangle$ のとき: $\tilde{G} = G \rtimes A$ (半直積) とすれば $\text{Irr}_A(G)$ の χ は \tilde{G} の既約指標、 $\tilde{\chi}$ に拡張される。このとき $\text{Irr}(G(A))$ の ζ と $\varepsilon = \pm 1$ が定まって

$$\tilde{\chi}(c\sigma) = \varepsilon \zeta(c) \quad (\forall c \in G(A))$$

となり、 $\chi^\pi = \zeta$ となる。

- (2) A が p -群 のとき: $\text{Irr}_A(G)$ の χ に対して $\chi^\pi = \zeta \in \text{Irr}(G(A))$ は $\chi|_{G(A)}$ の既約成分のうち重複度 $(\chi, \zeta)_{G(A)}$ $= (\chi, \zeta^G)_G$ が p と素な唯一の成分である。

§2 $(|A|, |G|) = 1$ と仮定しないときの拡張

- (1) $A = \langle \sigma \rangle$ のとき (松山: Jap. J. Math. 9 (1983))

$$\pi: \text{Irr}_A(G) \longrightarrow \text{Irr}(G(A)) \quad (\text{全単射})$$

があって、 $\text{Irr}_A(G)$ の χ の \tilde{G} への拡張を $\tilde{\chi}$ とするとき

$$\tilde{\chi}(c\sigma) = \lambda \chi^\pi(c) \quad (\forall c \in G(A)), \quad \lambda \neq 0$$

となるとき π を Glauberman 対応とよぶ。このとき

定理 3 (松山) Glauberman 対応が存在するを

必要十分条件は \tilde{G} における G -co-set $G\sigma$ について次が成り立つことである: $G\sigma = \bigcup_{g \in G} (G(g)\sigma)^g$ 。

- (2) A が p -群 のとき: このとき Glauberman の対応は Brauer の第 1 定理から導かれることを Alperin が指摘した。この考えをもとにして次の結果がえられる。

定理 4 (永尾 (1982)) A が p -群 のとき、 $\tilde{G} = G \rtimes A$ 、

$\text{Irr}(\tilde{G})^\circ$ は p -defect 0 の既約指標の全体、さうして

A -不変ものの全体を $\text{Irr}_A(G)^\circ$ とかく。また \tilde{G} における

G の complements の \tilde{G} -共役類の完全代表系を

$\sigma = \{A_1, \dots, A_r\}$ とするとき、全単射

$$\pi: \text{Irr}_A(G)^\circ \longrightarrow \bigcup_{i=1}^r \text{Irr}(G(A_i))^\circ = \mathcal{A}$$

が存在して、 $\text{Irr}_A(G)^\circ$ の χ 、 \mathcal{A} の ζ に対して

$$\zeta = \chi^\pi \iff (\zeta^G, \chi)_G \not\equiv 0 \pmod{p}$$

が成り立つ。

§ 1. 標題にある Cayley-Hamilton の定理を知らぬ人はいないだろうから, まず Amitsur-Levitzki の恒等式について説明しておく. A_1, A_2, \dots, A_{2n} を $2n$ 個の (n, n) -行列とする. このとき次の式が常に成り立ち, これを Amitsur-Levitzki の恒等式という. (cf. [2]. 以下, これを AL の恒等式と略記する.)

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^{\sigma} A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n)} = 0$$

ここに, \mathfrak{S}_{2n} は $2n$ 次の対称群で, 例えば $n = 1$ ならばこの式は

$$A_1 A_2 - A_2 A_1 = 0$$

となり, スカラー積の可換性を示す式になる. 原論文を調べたわけではないが, Cayley, Hamilton 2人の存命期間からして Cayley-Hamilton の定理は19世紀に見つけられたものに違いない. 一方, AL の恒等式が論文として発表されたのはなんと20世紀も半ば1950年のことである. 近年これら2つの恒等式を基にいろいろな方向の研究が成されているようであるが, 本稿ではこれらを自然にテンソル空間の写像に拡張したものについて簡単に解説し, さらに今後の問題点について述べることにする.

§ 2. 結果を述べる前に, 本題から話がずれるようだが恒等式発見の道筋を順にたどり, まずテンソル空間の既約分解の話から入ってゆこう. V を R^n または C^n とし, また V^* をその双対空間とする. すると $V \otimes V^* = \text{Hom}(V, V)$ には自然に $GL(V)$ が作用しており, よく知られているようにこの作用によって $V \otimes V^*$ は2つの既約な不変部分空間の和にわかれる.

$$V \otimes V^* = \{ A \in V \otimes V^* \mid \text{Tr } A = 0 \} \oplus \langle I \rangle \quad \text{----- (1)}$$

さらに, 次数を上げて $S^p(V \otimes V^*)$ ($V \otimes V^*$ の p 階の対称積) の既約分解について同様に考えてみる. つまり, $V \otimes V^*$ 上の p 次同次多項式の空間の $GL(V)$ の作用による既約分解を求めてみよう. 具体的な既約分解ではなく, $S^p(V \otimes V^*)$ の指標についてなら, 最近いろいろな人達の研究がある (cf. [3], [7], [8] etc). 一般には n の値により指標は変化するが, p に対して n が十分に大きければ結果は stable になり, そのときの指標を表す公式等が知られている. が, ここでは一歩踏み込んで, 指標だけではなく具体的な既約分解を求めることについて考えてみる. 一般の p に対してこれを実行するのは難しいが, $p = 2$ のときについては次

のようになる．まず，写像 $A_1, \dots, A_p : V \longrightarrow V$ に対し

$$\begin{cases} A_1 \circ \dots \circ A_p : S^p V \longrightarrow S^p V \\ A_1 \wedge \dots \wedge A_p : \wedge^p V \longrightarrow \wedge^p V \end{cases}$$

を

$$\begin{cases} (A_1 \circ \dots \circ A_p)(v_1 \circ \dots \circ v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} A_1 v_{\sigma(1)} \circ \dots \circ A_p v_{\sigma(p)} \\ (A_1 \wedge \dots \wedge A_p)(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (-1)^\sigma A_1 v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge A_p v_{\sigma(p)} \end{cases}$$

で定める．ここに \circ, \wedge はそれぞれ対称積・交代積をあらわす．ただし，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して

$$A_{\sigma(1)} \circ \dots \circ A_{\sigma(p)} = A_1 \circ \dots \circ A_p$$

$$A_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge A_{\sigma(p)} = A_1 \wedge \dots \wedge A_p$$

となることに注意しておく．すると，まず $S^2(V \otimes V^*)$ は次の形に分解される．

$$S^2(V \otimes V^*) = S^2 V \otimes S^2 V^* \oplus \wedge^2 V \otimes \wedge^2 V^*$$

またこの2つの成分は， $A \in V \otimes V^*$ に対してそれぞれ

$$\begin{cases} A \circ A : S^2 V \longrightarrow S^2 V \\ A \wedge A : \wedge^2 V \longrightarrow \wedge^2 V \end{cases}$$

で与えられることがわかる．つまり， $A \circ A, A \wedge A$ を成分表示したときに現れる A の2次式が，上の2つの不変部分空間を成している．これをさらに既約分解するため，先に指標を求めておく．その結果を書くと

$$S^2 V \otimes S^2 V^* : \begin{cases} S_{20^{n-2}-2} + S_{10^{n-2}-1} + S_{0^n} & n \geq 2 \\ S_0 & n = 1 \end{cases}$$

$$\wedge^2 V \otimes \wedge^2 V^* : \begin{cases} S_{110^{n-4}-1-1} + S_{10^{n-2}-1} + S_{0^n} & n \geq 4 \\ S_{10-1} + S_{000} & n = 3 \\ S_{00} & n = 2 \end{cases}$$

ただし， S_λ は分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ に対応する Schur 関数で，これ1つで $GL(V)$ の1つの既約成分を表している．例えば先程の分解 (1) における2つの既約成分はそれぞれ $S_{10^{n-2}-1}, S_{0^n}$ に相当する．特に， S_{0^n} は1次元の不変部分空間，つまり不変式にあたる．上の結果より， $S^2(V \otimes V^*)$ は $n \geq 4$ のとき stable になり全部で6個の既約成分にわかれることがわかる．また， $n = 3, 2, 1$ のときはそれぞれ5個，4個，1個の既約成分の和になる．

さてここで具体的に $S^2(V \otimes V^*)$ を既約分解しよう。途中の手順は省略して最終的な結果だけを書くと、

命題 1

$A \in V \otimes V^*$ として、 $S^2(V \otimes V^*)$ の既約成分は次で与えられる ($n \geq 4$) .

$$S^2 V \otimes S^2 V^* : \begin{cases} A \circ A - \frac{2}{n+2}(A^2 + \text{Tr } A \cdot A) \circ I + \frac{1}{(n+1)(n+2)}(\text{Tr } A^2 + (\text{Tr } A)^2) \cdot I \circ I \\ A^2 + \text{Tr } A \cdot A - \frac{1}{n}(\text{Tr } A^2 + (\text{Tr } A)^2) \cdot I \\ \text{Tr } A^2 + (\text{Tr } A)^2 \end{cases}$$

$$\wedge^2 V \otimes \wedge^2 V^* : \begin{cases} A \wedge A + \frac{2}{n-2}(A^2 - \text{Tr } A \cdot A) \wedge I - \frac{1}{(n-1)(n-2)}(\text{Tr } A^2 - (\text{Tr } A)^2) \cdot I \wedge I \\ A^2 - \text{Tr } A \cdot A - \frac{1}{n}(\text{Tr } A^2 - (\text{Tr } A)^2) \cdot I \\ \text{Tr } A^2 - (\text{Tr } A)^2 \end{cases}$$

(先に述べた指標の順に既約成分が書いてある。)

さて、これでめでたく $S^2(V \otimes V^*)$ の既約分解が得られたのであるが、ここで特に $n = 3$ のときについて考えてみる。既にみたように、 $n = 3$ のときは全部で5個の成分の和にわかれており、指標でいうならば $S_{110n-4-1-1}$ 、上の命題1でいうならば $\wedge^2 V \otimes \wedge^2 V^*$ の中の最初の成分が現れてこない。ではこの成分はどこにいったかということ、本当に消えてしまうのである。つまり A が $(3,3)$ -行列ならば不思議なことに

$$A \wedge A + 2(A^2 - \text{Tr } A \cdot A) \wedge I - \frac{1}{2}(\text{Tr } A^2 - (\text{Tr } A)^2) \cdot I \wedge I = 0 : \wedge^2 V \longrightarrow \wedge^2 V$$

という恒等式が成り立つのである。このように指標の消えてしまう所に、それに代わって恒等式が出現するという現象は $S^2(V \otimes V^*)$ に限らず、様々な所で起こっている。上の恒等式についても、これをさらに次のような形に一般化することができる。まず $A \in V \otimes V^*$ に対して $f_i(A) \in R$ or C を

$$\det(\lambda I - A) = \sum_{i=0}^n f_i(A) \lambda^{n-i}$$

で定める。($f_0(A) = 1$, $f_1(A) = -\text{Tr } A$, \dots , $f_n(A) = (-1)^n \det A$ 等.) すると

定理 2

$1 \leq p \leq n$ として $r = n+1-p$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} & \sum_{a_1+\dots+a_p=r} A^{a_1} \wedge \dots \wedge A^{a_p} + f_1(A) \sum_{a_1+\dots+a_p=r-1} A^{a_1} \wedge \dots \wedge A^{a_p} \\ & + \dots + f_{r-1}(A) \sum_{a_1+\dots+a_p=1} A^{a_1} \wedge \dots \wedge A^{a_p} + f_r(A) \cdot I \wedge \dots \wedge I = 0 \\ & : \wedge^p V \longrightarrow \wedge^p V \end{aligned}$$

という恒等式が成立する。(a_i は非負整数, $A^0 = I$ とする.)

ここで, $p = 1$ とおけば, $r = n$ なので上の式は

$$A^n + f_1(A) A^{n-1} + \dots + f_{n-1}(A) A + f_n(A) I = 0 \quad \text{----- (2)}$$

となり, これはまさしく Cayley-Hamilton の定理に他ならない. またここで, $p = n$ とおけば $r = 1$ となり, 上の式を変形すると最終的に

$$A \wedge I \wedge \dots \wedge I = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} A \cdot I \wedge \dots \wedge I : \wedge^n V \longrightarrow \wedge^n V \quad \text{----- (3)}$$

という恒等式が得られる. さらに $n = 3$, $p = 2$ としたものが, 先に得た恒等式に一致することもすぐにわかる. ($f_2(A) = 1/2 \cdot ((\operatorname{Tr} A)^2 - \operatorname{Tr} A^2)$ に注意.)

このことにより, この一般的な恒等式は Cayley-Hamilton の定理を Grassmann 代数の endomorphism に拡張したものであるといえる. 証明は略すが, 詳細については [1] を見られたい. ただし, この定理は一般の標数 0 の体においても同様に成り立つものと思われるのだが, 残念なことに今のところ, 体が R または C のときの証明しかわかっていない.

§ 3. この恒等式の応用として, AL の恒等式の一般化の話に移ろう. 実は初めに述べた AL の恒等式は Cayley-Hamilton の定理を使って簡単に証明することができる. つまり上の恒等式 (2) の A に適当な行列を代入しある操作を施せば AL の恒等式が得られるのである. (教養の線型代数の演習問題にふさわしい? 詳しくは [6] を参照.) 同様の発想の下に, 定理 2 を使うと次のテンソル空間の恒等式が得られる.

定理 3

A_1, \dots, A_{2n} を (n, n) -行列とする. このとき,

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^\sigma (A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)}) \circ \dots \circ (A_{\sigma(2n-1)} A_{\sigma(2n)}) = 0 \\ & : S^n V \longrightarrow S^n V \end{aligned}$$

が成り立つ.

この式を $n-1$ 回 contract すると丁度初めの AL の恒等式になる。その意味でこれは AL を一般化したものといってよい。証明には上で述べた恒等式 (3) を使う。詳細については [1] を参照。(また、清原氏によるグラフ理論を使った証明もある [4].)

実は行列の恒等式に関しては J. P. Razmyslov, C. Procesi による次の基本的な定理が知られている。

定理 4

Tr を係数に持つような行列の恒等式は、すべて Cayley-Hamilton の定理から得られる。

(証明及び正確な statement については [6], [5] を参照。) すると自然にこれのテンソル版としての次の予想が考えられる。

予想

行列のときと同様に、テンソル空間の恒等式はすべて先に述べた Grassmann 代数における Cayley-Hamilton の定理 (定理 2) から導ける。

残念ながら、今のところこの予想の一般的な証明はわかっていない。しかし、テンソル空間におけるいろいろな恒等式について、現在知られているものについてはすべて定理 2 からある方法で得られることがわかっており、この予想の裏付を与えている。(例えば (2,2)-行列 A_1, A_2, A_3 について

$$\odot[A_1, A_2] \circ A_3 - \odot[A_1, A_2] A_3 \circ I + \text{Tr}[A_1, A_2] A_3 \cdot I \circ I = 0 : S^2 V \longrightarrow S^2 V$$

という式が成り立つが、これも定理 2 より導くことができる。) 誰か上の予想を一般的に証明できませんか。できたら是非筆者にご一報下さい。

参 考 文 献

- [1] Y. Agaoka, On Cayley-Hamilton's theorem and Amitsur-Levitzki's identity, Proc. Japan Acad. 63 Ser. A (1987), 82-85.
- [2] A. S. Amitsur and J. Levitzki, Minimal identities for algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 449-463.
- [3] P. Hanlon, On the decomposition of the tensor algebra of the classical Lie algebras, Adv. in Math. 56 (1985), 238-282.
- [4] K. Kiyohara, 私信 (1986).

- [5] C. Procesi, The invariant theory of $n \times n$ matrices, Adv. in Math. 19 (1976), 306-381.
- [6] Ju. P. Razmyslov, Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero, Math. USSR Izv. 8 (1974), 727-760.
- [7] R. P. Stanley, The stable behavior of some characters of $SL(n, \mathbb{C})$, Linear & Multilinear Alg. 16 (1984), 3-27.
- [8] J. R. Stembridge, First layer formulas for characters of $SL(n, \mathbb{C})$, Trans. Amer. Math. Soc. 299 (1987), 319-350.

Level set representation for the Gibbs states of Ising models.

神欣理 樋口保成

\mathbb{Z}^d : d -dimensional square lattice

$\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ を直積位相を入れて考える.

$\mathcal{B}(\Omega)$: Ω の open sets から生成された σ -algebra

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\mathcal{F}_\Lambda = \sigma\{\omega(x); x \in \Lambda\}$ とかく

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < +\infty$, $\omega \in \Omega$ given のとき

$$(1) H_\Lambda^\omega(\omega') := - \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} \omega'(x)\omega'(y) - \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ y \in \partial\Lambda \\ |x-y|=1}} \omega'(x)\omega(y) - h \sum_{x \in \Lambda} \omega'(x)$$

とかく. h は外部磁場 と呼ばれる real parameter.

Definition: 温度 $T (> 0)$, 外部磁場 h のときの Ising model の Gibbs 分布 P は次の性質を満たす $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ 上の確率測度である.

$$(2) \quad \forall \Lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda| < +\infty, \quad \forall A \in \mathcal{F}_\Lambda \text{ に対して}$$

$$P[A | \mathcal{F}_{\Lambda^c}](\omega) = \sum_{\substack{\omega' \in A \\ \omega'(x) = \omega(x) \\ \forall x \in \Lambda^c}} Z_\Lambda(\omega)^{-1} \exp[-\beta H_\Lambda^\omega(\omega')]$$

$$Z_\Lambda(\omega) = \sum_{\substack{\omega': \omega'(x) = \omega(x) \\ \forall x \in \Lambda^c}} \exp[-\beta H_\Lambda^\omega(\omega')]$$

$$\beta = \frac{1}{kT}, \quad k: \text{Boltzmann 定数}$$

(2) が成り立つ時、単に P は (β, h) -Gibbs 分布 と呼ぶ.

Fact: $\exists \beta_c = \beta_c(d)$ s.t. $\beta < \beta_c$ ならば (β, h) -Gibbs 分布は 唯一に定まる.

これは $P_{\beta, h}$ と書く. このとき $P_{\beta, h}$ は h について weak convergence の位相で連続である.

Fact: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ が有限個の座標にしかよらない ω についての increasing な関数のとき

$$P_{\beta, h}(f) = \int_{\Omega} f(\omega) P_{\beta, h}(d\omega)$$

は h について単調増加

Theorem: ある ^{real valued} random field $X_{\beta} = \{X_{\beta}(x); x \in \mathbb{Z}^d\}$ が存在して

任意の $h \in \mathbb{R}^1$ と任意の有限集合 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対し

$$P_{\text{rob.}} \{ X_{\beta}(x) \leq h \text{ for } \forall x \in \Lambda \} = P_{\beta, h} [\omega \in \Omega; \omega(x) = 1 \forall x \in \Lambda]$$

が成立. ただし $\beta < \beta_c$ とする.

Corollary: $\beta < \beta_c$ のとき percolation 確率:

$$\theta(\beta, h) = P_{\beta, h} [|C_0^+(\omega)| = \infty]$$

は h の高々 1 つの値を除いて h について連続. 但し $\omega \in \Omega$ に対し

$C_0^+(\omega)$ は $\{x \in \mathbb{Z}^d; \omega(x) = 1\}$ の原点を含む連結成分とする.

($h_c(\beta) = \inf \{ h \in \mathbb{R}^1; \theta(\beta, h) > 0 \}$ とおくと $h \neq h_c(\beta)$ で $\theta(\beta, h)$ は連続)

abelian defect group とする p -block について

熊本大学 教養部 渡辺アツミ

有限群の modular 表現において, defect group が "abelian" である p -block の場合, Brauer の height conjecture と Alperin-Mackey の予想から, p -block とその Brauer correspondent の通常既約指標の個数は等しいことが予想されることになる。又最近の Broué : C.R.A.S., 307 (1988) にも予想されているように, p -block とその Brauer cor. との間には, block algebra の中心が同型である, Cartan 行列の単因子が一致する等の関係がありそうに思える。これらのことは defect group が cyclic である p -block の場合は Dade : Ann. Math., 84 (1966) と Linckelmann : C.R.A.S., 306 (1988) により, inertia index が 1 の p -block の場合は Broué-Puig : Invent. Math., 56 (1980) により正しい。以上のことに関連して次の結果を得た。

G を有限群, (K, φ, k) を φ が 1 の $|G|$ 乗根を含む p -modular 系とする。

定理 B を defect group D が "abelian" である p -block, b を $C_G(D)$ における B の root とする。又 $T(b)$ を b の $N_G(D)$ における inertia group とし, さらに $D_1 = C_D(T(b))$, $B_1 = b^{C_G(D_1)}$ とおく。このとき B と B_1 の間に次の関係が成立する。

(i) B と B_1 の通常既約指標の個数 $k(B)$ と $k(B_1)$ 及び modular 既約指標の個数 $l(B)$ と $l(B_1)$ はそれぞれ等しい。

(ii) B と B_1 の lower defect group は重複度もこめて一致する。とくに B の lower defect group は (G -共役を無視して) D_1 を含む。又 B と B_1 の Cartan 行列の単因子は重複度もこめて一致する。

(iii) E, E_1 とそれぞれ B, B_1 に対応する $vG, vC_G(D_1)$ の block idempotent とする。 $Z(kGE)$ と $Z(kC_G(D_1)E_1)$ は

$$\begin{array}{ccc} \phi: Z(kGE) & \longrightarrow & Z(kC_G(D_1)E_1) \\ \downarrow & & \\ Z1 & \longrightarrow & B_{E_{D_1}(z)}E_1 \end{array}$$

により同型である。

(i) の証明には Brauer-Pierce: J. Alg., 63 (1980) における一般指標を, (ii) には G の共役類の全体 $\mathcal{C}(G)$ の block 分割に関する local theory を用いる。 (iii) は $Z(kGE)$ の基底として $\mathcal{C}(G)$ の block 分割から得られるものを選ぶ, ϕ が 1 対 1 の写像であることを示す。

系 定理の記号の下に $[T(b), D]$ が cyclic であるならば

$$l(b) = e, \quad k(b) = |D_1| \left(e + \frac{|[T(b), D]| - 1}{e} \right),$$

但し $e = |T(b) : C_G(D)|$ 。

注意. B が principal p -block の場合は B と B_1 は同型である。また G が p -可解群の場合, vGE と $vC_G(D_1)E_1$ は森田同値である。

Lévy's stochastic infinitesimal equations, revisited.

愛知教育大学 野田明男

§1. Itô過程から Lévy の確率変分方程式へ

確率過程 $X(t)$, $t_0 < t < t_1$ ($-\infty \leq t_0 < t_1 \leq \infty$), に対し, 伊藤(1942年)から始まる理論における根本の仮定は, 現時点 t から $dt > 0$ だけ進む間の X の変量 $\delta X(t) = X(t+dt) - X(t)$ が正規分布 $N(m(t)dt, \sigma^2(t)dt)$ に従う, つまり, $N(0,1)$ -確率変数 ξ を用いて,

$$(1) \quad \delta X(t) = m(t)dt + \sigma(t)\sqrt{dt} \xi$$

と表すことにある。ここで, 過去の σ -field を $\mathcal{F}_t := \sigma\{X(u); t_0 < u \leq t\}$ と記すと, $m(t)$, $\sigma(t)$ はいずれも \mathcal{F}_t -可測で, ξ は \mathcal{F}_t と独立; 微小区間 $(t, t+dt)$ において, Itô過程 X が新たに獲得する random element が $\xi = \xi_t$ と他ならず, これは又標準 Brown 運動 $B(t)$ を用いて,

$$(2) \quad \sqrt{dt} \xi = dB(t) = \dot{B}(t) dt$$

と解釈できる。

我々は平均0, 連続な収分散をもつ Gauss 過程 $X(t)$, $X(t_0)=0$, に対話を限定する。
(1)における $\sigma(t) > 0$ は non-random となり, $m(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ は次の形をとる:

$$(3) \quad m(t) = \int_{t_0}^t g(t, u) dX(u).$$

$m(t)$ の別形として, 核 $g(t, \cdot)$ が絶対連続の場合, $g(t, u) = -\lambda(t) - \int_u^t c(t, v) dv$ と書くと,

$$(3') \quad m(t) = -b(t)X(t) - \int_{t_0}^t c(t,u)X(u)du$$

を得る。 $c \equiv 0$ のときは Markov 型； c が十分小さいときは、Markov 型 からの perturbation とみなして (3') の方が好む。

ある種の Gauss 過程に対して、(3) 又は (3') の研究が 樫田, 岡部, 三好等におこなわれた。

今日の話の目的は、(1) の形では捕捉できないさまざまなタイプの Gauss 過程があるということ； そのような多様性に対応するために (1) よりも広い範囲を cover できる Lévy の確率変分方程式を採用する必要があるだろう。

Lévy は 変分 $\delta X(t)$ を次の形に書く (全集 IV 巻参照)：

$$(4) \quad \delta X(t) = \mu_t(dt) + \sigma_t(dt)\xi,$$

$$\mu_t(dt) = E[\delta X(t) | \mathcal{F}_t], \quad \sigma_t^2(dt) = E[(\delta X(t) - \mu_t(dt))^2].$$

前と同じく、 ξ は過去の \mathcal{F}_t と独立な $N(0,1)$ -確率変数で、 X の innovation を示す。

§2. 分類

まず Gauss 過程 $X(t)$ に対する前提条件を設ける：

$$(A-1) \quad X(t) \text{ は purely non-deterministic, i.e., } \mathcal{F}_{t_0+t} := \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t_0+t+\varepsilon} = \{\emptyset, \Omega\};$$

$$(A-2) \quad X(t) \text{ は 標準表現 } X(t) = \int_{t_0}^t F(t,u) dB(u) = \int_{t_0}^t F(t,u) \xi_u du \text{ と表す。}$$

Lévy の確率変分方程式 (4) の観点から、 $X(t)$ のクラスを 4 つの型に分類することを提案したい：

- (I) $E[(\delta X(t))^2] = a(t) dt$; (II) $E[(\delta X(t))^2] = a(t) (dt)^\alpha$ ($0 < \alpha < 2, \alpha \neq 1$) ;
 (III) $X'(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ が存在する (これはもちろん, $E[(\delta X(t))^2] = E[(X'(t))^2] (dt)^2$ を導く);
 (IV) その他。

(I) が成立するとき (これは Lévy は normal form と呼ぶ), X は (I) に属し, $a(t) = \sigma^2(t)$ とする. (II) の代表例は $a(t) = \text{const.}$ とする fractional Brown 運動. (III) においては, $X(t)$ から $X'(t)$ に移行して $\delta X'(t)$ を次に研究する. $X'(t)$ が Itô 過程なる. 元の $X(t)$ は 2次の Itô 過程と呼ばれる (cf. 成田). Gauss 過程 として (III) の代表例は, 有数次元パラメータをもつ Brown 運動から導かれる $M(t)$ -過程で, 狭義 N 重 Markov 過程, i.e., 微分作用素 $L = \frac{1}{v_0(t)} \frac{d}{dt} \frac{1}{v_1(t)} \frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt} \frac{1}{v_N(t)}$ に対し $LX(t) = \dot{B}(t)$ を満たす.

我々はここで, (I) のクラスに着目し, さうしてそれを細分して (I) の小さな一般化を具体例に沿って論じていく. normal form (I) をもつものは (I-a). 次の (I-b) は, $\delta X(t)$ を無理に (I) の形に書くと, $m(t)$ が $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ とするもの; (ただし, $m(t)$ は generalized process として, あるいは飛田の意味の generalized Brownian functional として正当化できる場合を指し, (I-a) と同じく $a(t) = \sigma^2(t)$ をもつ).

(I-c) のクラスは, もはや $a(t) = \sigma^2(t)$ ($\forall t$) が成立せず, $\mu_t(dt)$ の部分に $S(t) \delta X(t^*)$ ($t \rightarrow t^*$ の写像は, (t_0, t_1) 上の単射で $t_0 < t^* < t$ とする) の形の項が現れる場合; 式に書くと,

$$(5) \quad \delta X(t) = dt \int_{t_0}^t g(t, u) dX(u) + S(t) \delta X(t^*) + \sigma(t) dB(t).$$

このとき $a(t) = S(t)^2 + \sigma(t)^2$ とする. 過去の時点における変分 $\delta X(t^*)$ が = 箇所以上 ($t_1^* > t_2^* > \dots$ 等) において現われる様な例を考慮するが, ここでは深入りしない.

(I) の中で, その他の可能性は一概して (I-d) に分類しておく.

§3. 定常増分をもつ周期的な Gauss 過程

(I) の中の subclass にそれぞれ入る簡単な例として, 定常増分をもつ周期過程

$X(t)$, $0 \leq t < 2\pi$, は若干より上にて述べた。

そのおける $X(t)$ は次の表現式をもつ $\varphi(t)$ と f.i. identify される:

$$(6) \quad \varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \cos nt), \quad a_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

X の共分散は, $E[X(s)X(t)] = \{\varphi(s) + \varphi(t) - \varphi(|s-t|)\}/2$ である。

例 1. reflection positivity (cf. Klein-Landau).

$$(7) \quad \varphi(t) = c_0 \frac{t(2\pi-t)}{2\pi} + \int_0^{\infty} \frac{(1-e^{-\lambda t})(1-e^{-\lambda(2\pi-t)})}{1-e^{-2\pi\lambda}} d\sigma(\lambda)$$

の形に, $c_0 \geq 0$ と $(0, \infty)$ 上の測度 σ ($\int_0^{\infty} \lambda d\sigma(\lambda) < \infty$) に f.i. 書けるクラスから始める。第 1 項の $\varphi_0(t) := t(2\pi-t)/2\pi$ に対応するのは pinned Brown 運動 $X_0(t)$ に他ならない。

$$(1)_0 \quad \delta X_0(t) = -\frac{X_0(t)}{2\pi-t} dt + dB(t)$$

と書ける Markov 過程。第 2 項の被積分関数 $\varphi_{\lambda}(t) := \frac{(1-e^{-\lambda t})(1-e^{-\lambda(2\pi-t)})}{1-e^{-2\pi\lambda}}$ ($2\pi-t := \tilde{t}$) に対応して次の normal form をもつ double Markov 過程を得る:

$$(1)_{\lambda} \quad \delta X_{\lambda}(t) = -dt \int_0^t \frac{\lambda \{ \text{sh}(\lambda \tilde{t}) + \lambda t \} - \lambda u \{ \text{ch}(\lambda \tilde{t}) - 1 \}}{2 \{ \text{ch}(\lambda t) - 1 \} / \lambda + t \text{sh}(\lambda \tilde{t})} dX_{\lambda}(u) + dB(t).$$

reflection positive な定常過程に対する同部の一連の研究と似た状況が、周期的な我らの場合にも観察できる; i) $\int_1^{\infty} \lambda^2 d\sigma(\lambda) < \infty$ ならば (I-a); ii) $\int_1^{\infty} \lambda d\sigma(\lambda) < \infty$ ならば (I-a) か (I-b) に属する。iii) $\int_1^{\infty} \lambda d\sigma(\lambda) = \infty$ ならば (I-b) である。

例2. 多次元パラメータの Lévy の Brown 運動.

定曲率空間上の Lévy の Brown 運動を $B(x)$, $x \in R^2$ (又は S^2 , H^2) とする. つまり, $B(x) - B(y)$ の分散が geodesic 距離 $d(x, y)$ に一致する. 中心 O , 半径 ρ の円周を S_ρ とし,

$$X(t) = B(x(t)), \quad x(t) \text{ は 偏角 } t \in [0, 2\pi) \text{ 上の } S_\rho \text{ 上の点,}$$

と定義すると, 対応する $\varphi(t)$ は次式で与えられる:

$$(8) \quad \varphi(t) = \begin{cases} 2\rho \sinh(t/2) & (R^2 \text{ の場合}), \\ \begin{cases} \cos^{-1}(\cos^2 \rho + \sin^2 \rho \cos t) & (0 < \rho < \pi/2) \\ t \wedge (2\pi - t) & (\rho = \pi/2) \end{cases} & (S^2 \text{ の場合}), \\ \cosh^{-1}(\cosh^2 \rho - \sinh^2 \rho \cos t) & (H^2 \text{ の場合}). \end{cases}$$

S^1 上の Lévy の Brown 運動 $\varphi_1(t) := t \wedge (2\pi - t)$ のみ. 他と異なり, $t = \pi$ で $\varphi_1(t)$ が不連続となる. これは, $\varphi_1(t)$ は $(I - c)$ に分類され, 他は通常 $(I - a)$ に入ることを意味する.

例3. 奇偶で異なるスペクトル $a_n \in t$ の $X(t)$.

(5) 式の形に表せる過程として, pinned Brown 運動 $\varphi_0(t)$ と S^1 上の Lévy の Brown 運動 $\varphi_1(t)$ の一次結合 ($p, q \geq 0$, $p+q=1$, $p \neq q$)

$$(9) \quad \varphi(t) = p\varphi_1(t) + \frac{q}{2}\varphi_0(2t) = \frac{q}{\pi} \left[\sum_{n: \text{奇数}} \frac{p}{n^2} + \sum_{n: \text{偶数}} \frac{q}{n^2} \right] (1 - \cos nt)$$

とより上げよう. $t^* = t - \pi$ ($\pi < t < 2\pi$) と定める. このとき次式が示される:

$$(10) \quad \delta X(t) = \begin{cases} -dt \frac{X(t)}{\pi/q - t} + dB(t) & (0 < t < \pi), \\ -dt \frac{X(t) + (q-p)(X(\pi) - X(t^*))}{2\pi - t} + (q-p)\delta X(t^*) + 2\sqrt{pq} dB(t) & (\pi < t < 2\pi). \end{cases}$$

くわしい証明、紙数の都合で書けなかった諸結果及び文献の列挙は、他日を行いたい。

最後に、完成度の低いこの研究結果を話す機会を手立て頂いた岡部教授に感謝する。Lévyの確率変分方程式のもつ重要性は標準表現の理論と合わせて、飛田先生が談いてやまないものである事を付記したい。

Alexander Eydeland

Two approaches to solving stationary problems in fluid dynamics and plasma physics are presented. The general form of these problems is $\mathcal{L}u = \mathcal{A}(u)$, where \mathcal{L} is a linear operator (differential or integral) and $\mathcal{A}(u)$ is a certain (nonlinear) function called profile function. In the first approach the profile function $\mathcal{A}(u)$ is given in the form $\mathcal{A}(u) = \lambda \bar{f}(u)$ where $\bar{f}(u)$ is an a priori prescribed function and λ is an unknown parameter. The problems of this sort typically arise in stationary problems of vortex dynamics (Rossby waves, vortex rings, vortex streets, etc.), in differential geometry (Wente surfaces of constant mean curvature), and in many other applications. The method of solving this problem consists of first writing the problem in the variational form (minimization or maximization of a certain functional subject to some constraints, typically the number of constraints in this approach is low). The main difficulties one encounters in devising algorithms for solving the above variational problem is that the functionals are typically nonlinear, nonconvex, the constraint sets are also nonconvex and the solution may not be unique. In this talk a general method is suggested which enables one to construct iteratively sequences of approximations which converge to a solution globally, i.e. from any initial guess. In addition to global convergence this method can be efficiently implemented: a general step is solving a linear elliptic problem and a low dimensional convex optimization problem. In the second approach discussed in the talk the profile function is not prescribed. It is rather determined implicitly by a solution of a minimization problem subject to infinitely many constraints, each constraint being a conserved quantity for the corresponding evolution equation. In the plasma equilibrium problems, for example, the constraints have the form $\int \varphi(u) dx$, where $\varphi(s)$ is an arbitrary function. In this talk a basis for this set of constraints is suggested which allows

one to rewrite the problem in a particularly convenient form and to develop a globally convergent procedure for solving a large class of problems. The convergence properties as well as questions related to the implementation of this procedure are discussed.

Morrey 空間におけるポテンシャル評価

宮川 鉄朗 (広大・理)

n 次元空間 \mathbb{R}^n 上の Radon 測度 μ がすべての球 $B(x, r)$ に対して

$$|\mu|(B(x, r)) \leq C r^{n(1-1/p)} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

を満たすとき, $\mu \in \mathcal{M}^p$ と記し, \mathcal{M}^p を Morrey 空間と呼ぶ(ことにする).

次の事実は容易にわかる.

$$(I) \quad (i) \quad \mathcal{M}^p \text{ は } \|\mu\|_p = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} r^{-n(1-1/p)} |\mu|(B(x, r))$$

に関して Banach 空間.

$M^p = \mathcal{M}^p \cap L^1_{loc}$ はその閉部分空間.

$$(ii) \quad \mathcal{M}^1 = \{\text{finite measures}\}, \quad M^1 = L^1$$

$$\mathcal{M}^\infty = M^\infty = L^\infty.$$

$$(II) \quad (i) \quad \mu \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R}^{n-1}) \Rightarrow \mu \otimes dx^n \in \mathcal{M}^{\frac{np}{n-1}}(\mathbb{R}^n)$$

$$(ii) \quad L^p \subset L^p_w \subset M^p \quad (1 < p < \infty)$$

$$(iv) \quad f \in L^p_w \iff \sup_{\alpha > 0} \alpha |\{ |f| > \alpha \}|^{1/p} < \infty$$

def $\alpha > 0$

($| \cdot |$: Lebesgue 測度)

空間 M^p 上で定義された Riesz ポテンシャルについて、
 L^p の場合と形の上では同じような評価式が得られる
 ということも報さす。以下

$$\Lambda = (-\Delta)^{1/2} \quad \text{と置く。}$$

$$(III) \mu \in M^p, \quad 0 < \alpha < n/p \Rightarrow \Lambda^{-\alpha} \mu \in M^q \quad (1/q = 1/p - \alpha/n)$$

$$\|\Lambda^{-\alpha} \mu\|_q \leq C \|\mu\|_p$$

$$(IV) f \in M^p, \quad \Lambda^\alpha f \in M^p, \quad \alpha > n/p \Rightarrow f \in L^\infty$$

$$\|f\|_\infty \leq C \|f\|_p^{1-n/\alpha} \|\Lambda^\alpha f\|_p^{n/\alpha}$$

$$f \in L^1_{loc}, \quad n \text{ に対し} \quad \bar{f}_r(x) = |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} f \, dy$$

$$[f]_{BMO} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} r^{-n} \int_{B(x, r)} |f - \bar{f}_r(x)| \, dx \quad \text{と置くとき}$$

$$(V) [f]_{BMO} \leq C \|\Lambda^\alpha f\|_p \quad (\alpha = n/p)$$

$$(VI) [f]_{C^{0, \beta}} \leq C \|\Lambda^\alpha f\|_p, \quad (\alpha > n/p, \quad \beta = \alpha - n/p < 1)$$

Remarks (i) M^p を用いたことにより、 \mathbb{R}^3 上の Navier-Stokes
 方程式の自己相似解の存在が示される。

(Giga-Miyakawa: 北大フロンティア No. ?)

(ii) 特異積分作用素の M^p 有界性についてはよくわかっていない。

(iii) $\{M^p\}$ または $\{M^p\}$ が、補間空間の族になっている
 かどうか不明である。

Geometry of monopoles

浜波大学・数学 伊藤光弘

講演内容は次のフリットから:

Yang-Mills-Higgs fields and harmonicity of limit maps

MITSUHIRO ITOH AND HIROKI MANABE

Consider a connection A and a Higgs field Φ on the trivial $SU(2)$ bundle over \mathbb{R}^3 , the Euclidean 3-space. A configuration (A, Φ) is called a Yang-Mills-Higgs field if it is a critical point of the action integral $\mathcal{Y}(A, \Phi) = \int_{\mathbb{R}^3} \{|F_A|^2 + |\nabla_A \Phi|^2\} d^3x$ ($F_A = dA + [A, A]$ and $\nabla_A \Phi = d\Phi + [A, \Phi]$ denote the curvature of A and the covariant derivative of Φ , respectively).

Yang-Mills-Higgs field satisfies the Euler-Lagrange equations $d_A * F + [\Phi, * \nabla_A \Phi] = 0, d_A(*\nabla_A \Phi) = 0$.

The infinity condition on Higgs fields $\Phi; |\Phi|(x) \rightarrow 1(|x| \rightarrow \infty)$ should be posed in order to avoid the trivial case. Then, for each (A, Φ) the degree of the normalized Higgs field at the infinity 2-sphere $\Phi/|\Phi|: S_\infty^2 \rightarrow S^2 \subset su(2)$ defines $k \in \mathbb{Z}$, called the charge.

A configuration (A, Φ) with finite $\mathcal{Y}(A, \Phi)$ satisfying Bogomolnyi equations, $\nabla_A \Phi = \pm * F_A$, yields a Yang-Mills-Higgs field. We call such a Yang-Mills-Higgs field a magnetic monopole.

Yang-Mills-Higgs fields correspond to 4-dimensional Yang-Mills connections and magnetic monopoles to (anti-)instantons.

Like the moduli space of instantons, the moduli space of charge k monopoles is variously considered. It turns out that the moduli space M_k is a complete hyperkähler manifold([2]). The twistor formalism was applied by Hitchin and monopoles were transferred into holomorphic

structures on a certain complex vector bundle over the space $G(\mathbb{R}^3)$ of all oriented lines in \mathbb{R}^3 and it was further shown that monopoles are interpreted as solutions to Nahm's equations([5],[6]). By using these, Donaldson proved that M_k is in a one-to-one correspondence to a complex manifold \mathcal{R}_k of all holomorphic maps $f: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1, f(\infty) = 0$, of degree k ([3]).

This observation is considered as presentation of a correspondence between the two different variational objects; Yang-Mills-Higgs fields and harmonic maps, because every holomorphic map is harmonic. A Harmonic map $f: S^2 \rightarrow X$ is critical for the energy functional $\mathcal{E}(f) = \int_{S^2} |df|^2 d\sigma$ ([4]).

In this paper we obtain the following phenomenon which gives a more direct representation of Yang-Mills-Higgs fields into harmonic maps by using the limiting of Higgs fields at infinity.

THEOREM 1. *Let $[(A, \Phi)]$ be a gauge equivalence class of $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs field of $\mathcal{Y}(A, \Phi) < \infty$ with the asymptotical condition $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq R} ||\Phi|(x) - 1| = 0$. If the representative (A, Φ) of $[(A, \Phi)]$ in radial gauge satisfies $\lim_{R \rightarrow \infty} \langle R^2 A(Rx), \Phi(Rx) \rangle = 0$ for all $x \in S^2$, then the limit map Φ_∞ of S^2 into the unit 2-sphere in $su(2)$, $\Phi_\infty(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \Phi(Rx), x \in S^2$, is a degree k harmonic map(k is the charge of (A, Φ)).*

$SU(2)$ Yang-Mills-Higgs field solutions of charge 1 are obtained in an explicit way as BPS monopoles ; $A(x) = (1/\sinh r - 1/r) (\partial/\partial r \times e) \cdot dx, \Phi(x) = \mp(1/\tanh r - 1/r)(\partial/\partial r \cdot e), r = r(x)$ ([7],[8]). In this BPS monopole case the limit map $\Phi_\infty: S^2 \rightarrow S^2$ becomes the identity map so that it is automatically holomorphic and hence harmonic.

In Theorem 1 we are able to replace the group $SU(2)$ by an arbitrary

compact simple group G (with Lie algebra \mathfrak{g}).

Let (A, Φ) be a G -Yang-Mills-Higgs field of finite action $\mathcal{Y}(A, \Phi)$ with asymptotical condition $\sup_{|x| \leq R} \|\Phi(x) - 1\| \rightarrow 0 (R \rightarrow \infty)$. Assume the image of the limit map $\Phi_\infty: S^2 \rightarrow S^N$ ($N = \dim \mathfrak{g} - 1$) lies in some orbit $\alpha \subset \mathfrak{g}$ through $X \in S^N([1], [8])$. The orbit α of the adjoint action is written as G/K for the isotropy subgroup K at X and carries a homogenous Kähler space structure imbedded in \mathfrak{g} with the minus Killing form.

THEOREM 2. *The limit map $\Phi_\infty: S^2 \rightarrow G/K$, representing the orbit α , is a harmonic map, provided that $[[A(Rx), [A(Rx), \Phi(Rx)]], \Phi(Rx)] = o(\frac{1}{R^2})(R \rightarrow \infty)$ for a representative (A, Φ) in radial gauge of the gauge equivalence class.*

A map Ψ being harmonic from S^2 into a submanifold M of the Euclidean space is characterized by that the Laplacian $\Delta\Psi$ of Ψ is normal to M at any $\Psi(x)$, $x \in S^2$. The above theorems are derived by making use of this fact.

We have moreover similar argument linking magnetic monopoles and holomorphic maps which corresponds just to Donaldson's correspondence.

THEOREM 3. *Let $[(A, \Phi)]$ be a gauge equivalence class of magnetic monopole with gauge group G of finite action. Assume the limit map Φ_∞ lies in an orbit α . If some representative (A, Φ) of $[(A, \Phi)]$ satisfies asymptotical condition $[A(Rx), \Phi(Rx)] = o(\frac{1}{R})(R \rightarrow \infty)$, then the map Φ_∞ into a homogeneous Kähler space representing the orbit α is holomorphic.*

The detailed discussion on these theorems will be given in forthcoming

papers.

References

- [1] M. Atiyah, *Instantons in two and four dimensions*, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 437-451.
- [2] M. Atiyah, N.Hitchin, "The geometry and dynamics of magnetic monopoles," Princeton University Press, Princeton, 1988.
- [3] S.K.Donaldson, *Nahm's equations and the classification of monopoles*, Commun. Math. Phys. **96** (1984), 387-407.
- [4] J.Eells, J.C.Wood, *Restrictions on harmonic maps of surfaces*, Topology **15** (1976), 263-266.
- [5] N. Hitchin, *Monopoles and geodesics*, Commun.Math.Phys. **83** (1982), 579-602.
- [6] N. Hitchin, *On the construction of monopoles*, Commun. Math. Phys. **89** (1983), 145-190.
- [7] M. Itoh, I.Mogi, "Differential geometry and gauge theory," Kyoritsu publ., Tokyo, 1986.
- [8] A. Jaffe, C.Taubes, "Vortices and monopoles," Birkhäuser, Boston, 1980.

Institute of Mathematics, University of Tsukuba, 305 JAPAN

談話会講演要旨

葉層構造のコホモロジーと熱方程式

九大・理 西川 青季

\mathcal{F} を閉多様体 M 上の葉層構造とし, $L \subset TM$ を \mathcal{F} の接束とする.
 M の de Rham 複体 Ω_M の部分複体

$$\Omega_B = \Omega_B(\mathcal{F}) \equiv \{ \omega \in \Omega_M \mid i(X)\omega = 0, \theta(X)\omega = 0 \text{ for } \forall X \in L \}$$

$$d_B \equiv d|_{\Omega_B} : \Omega_B \rightarrow \Omega_B^{+1}$$

から, \mathcal{F} の basic cohomology

$$H_B^i = H_B^i(\mathcal{F}) \equiv H(\Omega_B^i, d_B)$$

が定義される. また, $\omega \in \Omega_B^r$ を \mathcal{F} の basic r -form という.

\mathcal{F} をとくに Riemann 葉層構造とし, M 上の bundle-like 計量 g_M を用いて, Ω_B^r 上の basic Laplacian Δ_B を

$$\Delta_B = \delta_B d_B + d_B \delta_B : \Omega_B^r \rightarrow \Omega_B^r$$

と定義する. ここに, $\delta_B : \Omega_B^i \rightarrow \Omega_B^{i-1}$ は d_B の formal adjoint である.

また, 各 leaf の平均曲率ベクトルから自然に $\kappa \in \Omega_M^1$ が定義される.

このとき, 次の証明ができる.

定理: $\kappa \in \Omega_B^1(\mathcal{F})$ ならば, basic 熱作用素 $\partial/\partial t + \Delta_B : \Omega_B^r \rightarrow \Omega_B^r$ の基本解 $e_B^r(x, y, t)$ が basic 2重 (r, r) 形式 (各変数について C^∞ 級) として一意的に存在する.

証明には, $\kappa \in \Omega_B^1$ のとき, $\Delta_B : \Omega_B^r \rightarrow \Omega_B^r$ を de Rham 複体上の強楕円型作用素 $\tilde{\Delta} : \Omega_M^r \rightarrow \Omega_M^r$ に自然に拡張できることが本質的に用いられる.

この定理により、例えば $\alpha_0 \in \Omega_B^r$ に対して次の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(x, t) = -\Delta_B \alpha(x, t) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \alpha(x, t) = \alpha_0(x) \end{cases}$$

の解が

$$[P_B(t) \alpha_0](x) = \alpha(x, t) = \int_M e_B^r(x, y, t) \wedge * \alpha_0(y)$$

として与えられることがわかる。さらに

$$H_B \alpha_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_B(t) \alpha_0$$

$$G_B \alpha_0 = \int_0^\infty P_B(t) (\alpha_0 - H_B \alpha_0) dt$$

と定義することにより、basic r -form に対する de Rham-Hodge 分解

$$\alpha_0 = H_B \alpha_0 + \Delta_B G_B \alpha_0, \quad H_B \alpha_0 \in \text{Ker } \Delta_B$$

がえられる。

References

- [1] A.N. Milgram - P.C. Rosenbloom, Harmonic forms and heat conduction I, Proc. Nat. Acad. Sc., 37 (1951), 180-184.
- [2] S. Nishikawa - M. Ramachandran - Ph. Tondeur, The heat equation for Riemannian foliations, preprint.